



UNIVERSIDAD  
DE MÁLAGA

**Universidad de Málaga**

**Tesis Doctoral**

# **Análisis, Desarrollo y Validación del Método del Límite Superior en Procesos de Conformado por Indentación**

**Carolina Bermudo Gamboa**

Directores de Tesis

**Dr. D. Lorenzo Sevilla Hurtado**

**Dr. D. Francisco de Sales Martín Fernández**



**Málaga, 2015**



Publicaciones y  
Divulgación Científica

AUTOR: Carolina Bermudo Gamboa

EDITA: Publicaciones y Divulgación Científica. Universidad de Málaga



Esta obra está sujeta a una licencia Creative Commons:

Reconocimiento - No comercial - SinObraDerivada (cc-by-nc-nd):

[Http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/es](http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/es)

Cualquier parte de esta obra se puede reproducir sin autorización  
pero con el reconocimiento y atribución de los autores.

No se puede hacer uso comercial de la obra y no se puede alterar, transformar o hacer  
obras derivadas.

Esta Tesis Doctoral está depositada en el Repositorio Institucional de la Universidad de  
Málaga (RIUMA): [riuma.uma.es](http://riuma.uma.es)

**Tesis Doctoral**

# **Análisis, Desarrollo y Validación del Método del Límite Superior en Procesos de Conformado por Indentación**

**Carolina Bermudo Gamboa**

Ingeniería de Fabricación



ÁREA DE INGENIERÍA DE LOS PROCESOS DE FABRICACIÓN

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA CIVIL, DE MATERIALES Y FABRICACIÓN

**UNIVERSIDAD DE MÁLAGA**

Para la obtención del Grado de Doctor

por la Universidad de Málaga

**Málaga, 2015**



A mi hermana Lola. Sabes que puedes conseguirlo todo.

*“No hay oportunidad más valiosa que la que te otorgas a ti mismo.”*

To my sister Lola. She can reach everything

*“There is no more valuable chance that the one you decide to give yourself”*



## AGRADECIMIENTOS

*Agradecer, en primer lugar, a mis directores, Lorenzo Sevilla y Francisco Martín, el interés y la dedicación mostrada en la realización de la presente tesis, así como la acogida recibida desde el primer momento. Sin vuestro recibimiento, apoyo y consejo, este trabajo que hoy presento no habría sido posible.*

*A Manuel Herrera, gracias por esas incontables horas que has pasado conmigo en el taller, haciendo y deshaciendo, hasta lograr que los ensayos se llevaran a cabo. Gracias por la paciencia mostrada y por dar respuesta a todas y cada una de las dudas que he podido tener.*

*En general, agradecer a los compañeros del área su calor y recibimiento. No he podido estar mejor trabajando junto a un equipo tan humano.*

*Agradecer a Ana M. Camacho, doctora de la Universidad Nacional de Educación a Distancia, las horas conmigo frente al ordenador descifrando los entresijos de los elementos finitos. Así como a Miguel Ángel Sebastián, catedrático de la misma universidad, su ayuda en la consecución de lo necesario para continuar con la investigación.*

*A mis padres y en especial a mi madre. Gracias por ese empuje incansable que me brindas, de una forma u otra, hacia las metas que me propone la vida. A mi hermana, por esa interminable curiosidad por el ámbito de estudio que abarco. A mi tío Daniel, por no dejar de recordarme la suerte que tengo de tenerlo conmigo. A mi abuela Dolores, porque se lo merece todo. A mi familia al completo, por conseguir que cada día sea único.*

*A mis amigos, muchas gracias por los buenos momentos y por el apoyo en los momentos en los que lo he necesitado. A Rocío, gracias por todo lo que hemos vivido juntas, por creer en mí y por todo lo que me has dado. A Lola, a la familia Zambrana, por recibirme siempre con los brazos abiertos.*

*A mis compañeros de Suecia, en especial a Carmen, por logarme una estancia maravillosa y pelear y celebrar conmigo los logros obtenidos en esos cortos tres meses. Y, por supuesto, a Matías Urenda, doctor de la Universidad de Skövde, por hacer posible dicha estancia y cuidar cada detalle de la misma.*





## RESUMEN

La presente Tesis Doctoral, cuyo desarrollo ha sido financiado por el Ministerio de Educación, Cultura y Deportes de España a través de la concesión de las becas de Formación de Profesorado Universitario (FPU) 2010, se enmarca dentro del programa de doctorado “Ingeniería de Fabricación”, regulado por el Real Decreto 1393/2007, asociado al grupo de investigación PAI de la Junta de Andalucía TEP 933 Ingeniería de Fabricación, dentro de la línea de investigación “*Métodos de análisis de procesos de Deformación Plástica*”. En ella se aborda el estudio relativo al desarrollo del Teorema del Límite Superior, mediante su configuración modular de Bloques Rígidos Triangulares, para su implementación en el análisis de procesos de indentación.

Para ello, se realiza un estudio previo sobre la investigación llevada a cabo por F. Martín, “*Desarrollo, integración y optimización en el estudio del proceso de forja mediante el Teorema del Límite Superior a través del modelo de Bloques Rígidos Triangulares*”, conducente a la adaptación del modelo modular a los procesos de indentación. Posteriormente, se configuran diversos modelos de análisis y se realiza un análisis comparativo entre los resultados obtenidos, con el fin de concretar el modelo óptimo para el proceso de indentación estudiado. Se aborda la necesidad de presentar una división en las piezas analizadas entre finitas e infinitas, para adaptar el modelo desarrollado al patrón de deformación presente en cada caso. Asimismo, una vez obtenido el modelo modular óptimo, se estudia su aplicación tanto para punzones planos, como para punzones inclinados y su respuesta ante la introducción de diferentes factores presentes en los procesos de deformación, tales como el efecto del rozamiento y la consideración del endurecimiento del material.

Igualmente, se llevan a cabo simulaciones por elementos finitos del proceso analizado, comparando los resultados con los obtenidos mediante el modelo desarrollado en la aplicación analítica del Teorema del Límite Superior. Los resultados de la aplicación de ambos métodos muestran una gran similitud y, por tanto, una gran precisión en los resultados obtenidos. Además, se configura una serie de ensayos experimentales del proceso, realizando otra comparación con los resultados obtenidos tanto de la aplicación del Teorema del Límite Superior, como del análisis mediante elementos finitos, demostrando, una vez más, la validez de los resultados arrojados por el modelo analítico desarrollado.

Con la presente Tesis Doctoral se realiza un estudio amplio y profundo de la aplicación del Teorema del Límite Superior a los procesos de deformación plástica de indentación, ampliando el conocimiento sobre este tipo de análisis y demostrando la viabilidad, en cuanto a aplicación práctica y precisión, de la obtención de los esfuerzos requeridos para la deformación plástica mediante el modelo modular planteado.

**Palabras clave:** Teorema del Límite Superior; Indentación; Configuración Modular; Bloques Rígidos Triangulares; Fabricación; Deformación Plástica.



## ABSTRACT

Present Ph. D. Thesis, funded by the Ministry of Education, Culture and Sports of Spain, through the FPU (University Professor Training) grant in 2010, is part of the doctoral program "Manufacturing engineering", regulated by the Royal Decree 1393/2007, and associated with the TEP 933 manufacturing engineering research group, within the research line "*Analysis methods of plastic deformation processes*". This Ph. D. Thesis deals with the development of the Upper Bound Theorem through its Rigid Triangular Zones modular configuration, for its implementation in the analysis of indentation processes.

To this end, a preliminary study about the research carried out by F. Martin, "*Development, integration and optimization in the study of the forging process through the Upper Bound Theorem by means of the Rigid Triangular Zone model*" is made, conducive to the modular adaptation for the indentation processes. Subsequently, various analysis models are configured. A comparison between the results obtained is made in order to concrete the optimal model for the studied indentation process. The need of a differentiation in the work-piece analyzed between finite and infinite is addresses to better adapt the developed model to the deformation pattern present in each case study. Also, once obtained the optimal modular model, its application to both flat and inclined punches and its response to the introduction of the factors present in the deformation processes, such as friction or hardening, is analyzed.

Similarly, finite elements simulations of the process analyzed are conducted comparing the results with those obtained using the developed analytical model. The results obtained reach a strong similitude and accuracy. In addition, a series of experimental indentation tests and another comparison with both results obtained from the application of the Upper Bound Theorem and the finite element analysis is made, showing, once again, the adequacy of the results obtained by the developed model.

With the present Ph. D Thesis, a wide and deep study of the application of the Upper Bound Theorem to plastic deformation processes, such as indentation, is done. This study extends the knowledge about this analysis type and demonstrates its viability, practicality and accuracy obtaining the efforts required for plastic deformation using the developed modular configuration.

**Key words:** Upper Bound Theorem; Indentation; Modular Configuration; Triangular Rigid Zone; Manufacturing; Plastic Deformation.



# Índice General

---



## Capítulo 1: Generalidades

1.1	Ámbito de la tesis.....	1.1
1.2	Objetivo de la Tesis.....	1.3
1.3	Estructura de la tesis.....	1.5

## Capítulo 2: Introducción a la Deformación Plástica

2.1	Introducción a la Plasticidad.....	2.1
2.2	Evolución de las técnicas de deformación plástica.....	2.5
2.3	Indentación: Proceso de conformado por deformación plástica mediante compresión directa.....	2.7
2.4	Rozamiento en los PCDP.....	2.12
2.5	Método de Análisis.....	2.15
2.5.1	Deformación Homogénea.....	2.16
2.5.2	Análisis Local de Tensiones.....	2.18
2.5.3	Campo de Líneas de Deslizamiento.....	2.20
2.5.4	Teoremas del Límite.....	2.24
2.5.4.1	Límite Inferior.....	2.24
2.5.4.2	Límite Superior.....	2.25
2.5.4.3	Límite superior en Deformación Plana.....	2.28
2.5.4.4	Límite Superior mediante Bloques Rígidos Triangulares: propuesta Modular.....	2.31

## Capítulo 3: Teorema del Límite Superior: Estado del arte

3.1	Introducción.....	3.1
3.2	Comienzos del TLS.....	3.2
3.3	Evolución del TLS.....	3.3
3.3.1	Campos de fluencia.....	3.3
3.3.2	Casos Axi-simétricos.....	3.5
3.3.3	Casos no axi-simétricos.....	3.7
3.3.4	Introducción de factores propios del conformado plástico.....	3.9

3.3.5	TLS 3D .....	3.11
3.3.6	TLS modular .....	3.13
3.4	Aplicabilidad del TLS a procesos de fabricación por conformado plástico .....	3.15
3.4.1	Indentación .....	3.16
3.5	Otros campos de aplicación .....	3.18

## Capítulo 4: Aplicación del TLS mediante módulos de BRT en indentación

4.1	Introducción del TLS aplicado a la Indentación .....	4.1
4.2	Aplicación modular .....	4.5
4.3	Esquema del procedimiento .....	4.7
4.4	Construcción del hodógrafo.....	4.9
4.5	Rozamiento considerado.....	4.10
4.5.1	Rozamiento externo (punzón-pieza) .....	4.10
4.5.2	Rozamiento interno (pieza-pieza) .....	4.11
4.5.3	Tratamiento general.....	4.13
4.6	Evolución del modelo .....	4.14
4.6.1	Planteamiento 1: Modelo de partida.....	4.14
4.6.2	Planteamiento 2 .....	4.16
4.6.3	Planteamiento 3 .....	4.18
4.6.4	Planteamiento 4 .....	4.19
4.6.5	Planteamiento 5 .....	4.20
4.6.6	Piezas de espesor intermedio .....	4.22
4.6.6.1	Estudios y Deformaciones .....	4.27
4.6.7	Planteamiento 5 optimizado .....	4.31
4.6.8	Planteamiento 6 .....	4.33
4.6.9	Modelo Adoptado.....	4.37
4.6.10	Esquema de la evolución del modelo.....	4.38

## Capítulo 5: Estudio de la deformación con punzón plano

5.1	Estudio del punzón plano .....	5.1
-----	--------------------------------	-----



5.1.1	Configuración de pieza semi-infinita para CLD .....	5.2
5.1.2	Configuración de pieza finita para CLD .....	5.3
5.1.3	Piezas Finitas en TLS .....	5.4
5.1.4	Piezas Infinitas en TLS .....	5.9
5.1.5	Factor Geométrico de Ajuste .....	5.15
5.2	Contrastación final de resultados aportados por el TLS frente al CLD para indentación con punzón plano.....	5.20

## Capítulo 6: Estudio y Análisis comparativo mediante el Método de Elementos Finitos

6.1	Método de Elementos Finitos. Introducción.....	6.1
6.2	DEFORM .....	6.4
6.2.1	Pre-procesador .....	6.6
6.2.2	Simulación .....	6.6
6.2.3	Post-procesador .....	6.7
6.2.4	Unidades .....	6.7
6.3	Conformado por indentación implementado en DEFORM.....	6.8
6.3.1	Estudio de mallado óptimo.....	6.9
6.3.2	Estudio del tamaño de la pieza: Finita o Infinita .....	6.17
6.4	ABAQUS FEA .....	6.21
6.5	Conformado por indentación implementado en ABAQUS .....	6.23
6.6	Contrastación de resultados obtenidos mediante el MEF, CLD y TLS mediante BRT.....	6.23

## Capítulo 7: Otros casos de estudio

7.1	Introducción del Rozamiento .....	7.1
7.2	Introducción del endurecimiento por deformación .....	7.4
7.3	Materiales simulados.....	7.7
7.3.1	Cálculo del exponente de endurecimiento .....	7.14
7.3.2	Resultados Modelo de Endurecimiento 3.....	7.16
7.3.3	Resultados Modelo de Endurecimiento 2.....	7.18

7.3.4	Resultados Modelo de Endurecimiento 1 .....	7.21
7.4	Estudio Punzón Inclinado .....	7.23

## Capítulo 8: Ensayos

8.1	Equipos y herramientas .....	8.2
8.2	Elección de Material .....	8.6
8.2.1	Plomo .....	8.7
8.2.2	Estaño .....	8.9
8.2.3	Aluminio 2030 .....	8.11
8.3	Ensayos .....	8.13
8.4	Resultados .....	8.15
8.5	Ensayo de Tracción .....	8.20
8.6	Comparativa Ensayos, MEF y TLS .....	8.23

## Capítulo 9: Aplicaciones

9.1	Aplicación 1 .....	9.1
9.2	Aplicación 2 .....	9.3
9.3	Aplicación 3 .....	9.4

## Capítulo 10: Conclusiones

10.1	Introducción .....	10.1
10.2	Conclusiones generales .....	10.1
10.3	Conclusiones particulares .....	10.2
10.4	Líneas futuras de desarrollo .....	10.3

## Thesis English Summary

E.1.	Research Line .....	E.1
E.2.	Final Results .....	E.3
E.2.1.	Infinite Work-piece .....	E.3
E.2.2.	Finite Work-piece .....	E.3

E.3.3.	Finite/Infinite configuration .....	E.4
E.2.4.	Work-piece base study .....	E.4
E.2.5.	Friction factor .....	E.4
E.2.6.	Tilted punch .....	E.5
E.2.7.	Hardening .....	E.5
E.2.8.	Trials.....	E.5
E.2.9.	M.E.F.....	E.6
E.3.	Conclusions.....	E.7
E.3.1.	General conclusions .....	E.7
E.3.2.	Singular conclusions .....	E.8
E.3.3.	Future development lines.....	E.8

## **Anexo I: Recopilación histórica sobre la evolución del estudio de la plasticidad desde 1980 hasta la actualidad**

A.1.1.	Resumen: Inicios-1980.....	A.1.2
A.1.2.	1980 en adelante .....	A.1.5
A.1.2.1.	Criterios de Fluencia .....	A.1.5
A.1.2.2.	Modelado del efecto Bauschinger .....	A.1.10
A.1.3.	Líneas generales de desarrollo .....	A.1.11
A.1.3.1.	Década de los 80 .....	A.1.11
A.1.3.2.	Década de los 90 .....	A.1.13
A.1.3.3.	Siglo XXI.....	A.1.14
A.1.4.	Esquema Evolutivo hasta 1980 .....	A.1.16
A.1.5.	Esquema Evolución Criterios de Fluencia .....	A.1.17
A.1.6.	Evolución Modelos de Esfuerzos .....	A.1.18

## **Anexo II: Resultados de endurecimiento por deformación**

A.2.1	Introducción.....	A.2.1
A.2.2	Modelo 1 .....	A.2.2
A.2.3	Modelo 2 .....	A.2.3
A.2.4	Modelo 3 .....	A.2.7



# Listado de Figuras

---

*Análisis, Desarrollo y Validación del Método del Límite Superior en Procesos de Conformado por Indentación*

---



## Capítulo 1: Generalidades

Figura 1.1: Comparativa curvas tensión/deformación .....	1.2
--	-----

## Capítulo 2: Introducción a la Deformación Plástica

Figura 2.1: Disco Celeste de Nebra .....	2.5
Figura 2.2: Martillo Inclinado hidráulico de Jessop, Abbeydale Industrial Hamleto. ....	2.7
Figura 2.3: Proceso fabricación anillos forjados Fuente.....	2.9
Figura 2.4: Punzonado de cavidades con matriz contenedora.....	2.10
Figura 2.5: Representación de la sección de un proceso de indentación .....	2.11
Figura 2.6: Deformación Homogénea.....	2.17
Figura 2.7: Análisis Local de Tensiones .....	2.19
Figura 2.8: Pares de líneas de deslizamiento .....	2.21
Figura 2.9: Tensión cortante pura en Deformación Plana.....	2.22
Figura 2.10: Posible Campo de líneas de deslizamiento en caso de Indentación .....	2.22
Figura 2.11: Definición de términos .....	2.26
Figura 2.12: Modelo de deformación .....	2.29
Figura 2.13: Hodógrafo correspondiente a la Figura 2.12.....	2.29
Figura 2.14: Disipación de energía interna .....	2.30
Figura 2.15: Hodógrafo Módulo A Figura 2.16 .....	2.31
Figura 2.16: División Modular en Indentación.....	2.32
Figura 2.17: Tratamiento No Modular y Hodógrafo correspondiente.....	2.32

## Capítulo 3: Teorema del Límite Superior: Estado del arte

Figura 3.1: D.C. Drucker.....	3.2
Figura 3.2: Comparativa del CLD y el TLS mediante BRT .....	3.3
Figura 3.3. Comparación de soluciones obtenidas con TLS .....	3.4
Figura 3.4: Patrones de fluencia para TLS .....	3.4
Figura 3.5: (a) Distintas matrices de experimentación y (b) comparativa de resultado .....	3.5
Figura 3.6: Transformación del campo de velocidades en un proceso de extrusión .....	3.5
Figura 3.7: Análisis microforja abierta.....	3.7

Figura 3.8: Deformación no axi-simétrica .....	3.8
Figura 3.9: Comparativa entre resultados del TLS y ensayos reales .....	3.9
Figura 3.10: Campo de velocidades en forja con rozamiento .....	3.10
Figura 3.11: Cambios progresivos en el conformado incremental de engranajes .....	3.11
Figura 3.12: Campo de velocidades para un paralelepípedo circular convexo .....	3.12
Figura 3.13: Aproximación del TLS al mallado secuencial.....	3.13
Figura 3.14: Enfoque no modular (a) y modular (b) aplicado al mismo proceso de conformado .....	3.13
Figura 3.15: Disminución en la formación de rebaba una vez aplicado el SBT .....	3.14
Figura 3.16: Aplicación del TLS mediante capas (a) y hodógrafo derivado (b) .....	3.15
Figura 3.17: ECAP Análisis mediante TLS bajo condiciones de deformación plana .....	3.16
Figura 3.18: Indentación sobre material multi-capa .....	3.17
Figura 3.19: Similitud entre la aplicación del TLS a estudios sobre suelos e indentación .....	3.18

#### Capítulo 4: Aplicación del TLS mediante módulos de BRT en indentación

Figura 4.1: Disposición pieza entre punzones planos (PP) .....	4.3
Figura 4.2 Disposición pieza entre punzones inclinados (PI) .....	4.3
Figura 4.3: Condiciones de contorno para un cuarto de pieza .....	4.3
Figura 4.4: Comparativa entre la aplicación del TLS bajo su consideración modular (a,b) y no modular (c) .....	4.6
Figura 4.5: Diferencia entre el tratamiento no modular (a) y modular (b) .....	4.7
Figura 4.6: Clasificación del tipo de pieza según espesores.....	4.8
Figura 4.7: Clasificación de las tipologías de estudios realizados.....	4.8
Figura 4.8: Campo genérico de discontinuidad de velocidades .....	4.9
Figura 4.9: Fases de creación de un hodógrafo genérico .....	4.10
Figura 4.10: Cambios en la superficie ante la aplicación de cargas elevadas.....	4.11
Figura 4.11: Ejemplo de pieza pequeña. ....	4.12
Figura 4.12: Ejemplo de pieza grande .....	4.13
Figura 4.13: Modelo inicial de indentación y ubicación del conflicto .....	4.15
Figura 4.14: Hodógrafo módulo A.....	4.15
Figura 4.15: Hodógrafo módulo B.....	4.15



Figura 4.16: Planteamiento 2 y zona de conflicto .....	4.16
Figura 4.17: Hodógrafo módulo Ad-hoc.....	4.17
Figura 4.18: Hodógrafo módulo B.....	4.17
Figura 4.19: Comparativa $p/2k$ para m mínima .....	4.18
Figura 4.20: Comparativa $p/2k$ Modular y No Modular para m máxima. ....	4.18
Figura 4.21: Planteamiento 3.....	4.19
Figura 4.22: Planteamiento 4.....	4.19
Figura 4.23: Comparativa Planteamiento 4 Vs No Modular para m máxima .....	4.20
Figura 4.24: Planteamiento 5.....	4.20
Figura 4.25: Comparativa Planteamiento 5 Vs No Modular para m máxima .....	4.21
Figura 4.26: Modelo No Modular inicial .....	4.21
Figura 4.27: Modelo No Modular homólogo al planteamiento 5 .....	4.21
Figura 4.28: Resultados P.5 frente al No Modular análogo para m máxima .....	4.22
Figura 4.29: Planteamiento 5.1.....	4.22
Figura 4.30: Configuración pieza tamaño intermedio.....	4.23
Figura 4.31: Tratamiento multicapa pieza mediana .....	4.23
Figura 4.32: Configuración hodógrafos según columna.....	4.24
Figura 4.33: C.C. 1 .....	4.25
Figura 4.34: C.C. 2 .....	4.25
Figura 4.35: C.C. 3 .....	4.25
Figura 4.36: Disposición de módulos según el Estudio.....	4.26
Figura 4.37: Configuración Deformación 1 .....	4.27
Figura 4.38: Configuración Deformación 2 .....	4.27
Figura 4.39: Configuración Deformación 3 .....	4.28
Figura 4.40: Comparativa evolución resultados Def. 1 y 2.....	4.28
Figura 4.41: Comparativa Estudios con modelo Def. 2.....	4.29
Figura 4.42: Comparativa Estudios con modelo Def. 3.....	4.29
Figura 4.43: Comparativa entre Deformación 2 y 3 .....	4.30
Figura 4.44: Representación de valores máximos .....	4.30
Figura 4.45: Optimización Planteamiento 5 .....	4.31
Figura 4.46: Optimización Planteamiento 5 .....	4.31
Figura 4.47: P5 con 2 y 3 módulos .....	4.32

Figura 4.48: Cambio $L/H_T$ a $H_T/L$ .....	4.32
Figura 4.49: Captura pantalla proceso deformación Deform3D .....	4.33
Figura 4.50: Planteamiento 6.....	4.34
Figura 4.51: Evolución inclinación Planteamiento 6.....	4.34
Figura 4.52: Módulo libre Planteamiento 6 .....	4.36
Figura 4.53: Modelo adoptado.....	4.37
Figura 4.54: Modelo adoptado.....	4.38

## Capítulo 5: Estudio de la deformación con punzón plano

Figura 5.1: Campo de Líneas de Deslizamiento sugerido por Prandtl .....	5.1
Figura 5.2: Representación gráfica del Campo de Líneas de Deslizamiento para una pieza finita.....	5.2
Figura 5.3: Aplicación del CLD a un proceso de indentación.....	5.3
Figura 5.4: Aplicación modelo modular a pieza de espesor reducido .....	5.5
Figura 5.5: Detalle del planteamiento modular pieza espesor reducido .....	5.5
Figura 5.6: Configuración módulo A y hodógrafo correspondiente .....	5.6
Figura 5.7: Configuración módulo B y hodógrafo correspondiente .....	5.7
Figura 5.8: Configuración módulo C y hodógrafo correspondiente .....	5.9
Figura 5.9: Ilustración aplicación modular a espesor infinito .....	5.10
Figura 5.10: Radio de acción vertical de la deformación.....	5.14
Figura 5.11: Radio de acción horizontal de la deformación .....	5.14
Figura 5.12: Evolución de la aplicación modular a pieza finita .....	5.16
Figura 5.13: Variación de $p/2k$ según el porcentaje asignado.....	5.16
Figura 5.14: Variación de $p/2k$ para valores mayores a 24%.....	5.17
Figura 5.15: $p/2k$ para distintos $\theta$ .....	5.18
Figura 5.16: Cruce de resultados entre modelos Finito e Infinito .....	5.19
Figura 5.17: Composición de resultados .....	5.19
Figura 5.18: Comparativa resultados Campo de Líneas de Deslizamiento y Modelo Modular .....	5.20

## Capítulo 6: Estudio y análisis comparativo mediante el Método de Elementos Finitos

Figura 6.1: Árbol genealógico del Método de Elementos Finitos .....	6.3
Figura 6.2: Entorno y pieza en DEFORM 2D .....	6.8
Figura 6.3: Entorno y pieza en DEFORM 3D .....	6.8
Figura 6.4: Pieza estándar para estudio de mallado .....	6.10
Figura 6.5: Resultados obtenidos del mallado automático .....	6.10
Figura 6.6: Comparativa 2º mallado y mallado automático .....	6.11
Figura 6.7: Ventanas de mallado .....	6.12
Figura 6.8: Comparativa del 2º y 3er Mallado .....	6.13
Figura 6.9: Comparativa entre el 4º y 3er mallado .....	6.13
Figura 6.10: Comparativa entre el 5º y el 4º mallado .....	6.14
Figura 6.11: Incorporación de la tercera ventana de mallado .....	6.14
Figura 6.12: Comparativa entre los mallados 4º, 5º y 6º .....	6.15
Figura 6.13: Aumento del número de elementos .....	6.15
Figura 6.14: Comparativa entre mallado 5º, 6º, 7º y 8º .....	6.16
Figura 6.15: Comparativa mallados 7º, 8º y 9º .....	6.17
Figura 6.16: Penetración profunda a pieza infinita con punzón con ancho 4mm .....	6.17
Figura 6.17: Penetración profunda a pieza infinita con punzón con ancho 8mm .....	6.18
Figura 6.18: Evolución resultados para indentación profunda con punzón con ancho 10 mm .....	6.18
Figura 6.19: Superposición resultados indentación profunda distintos punzones .....	6.19
Figura 6.20: Resultados indentación con pieza de bases diferentes [mm] .....	6.20
Figura 6.21: Deformación del proceso debido a una base de pieza insuficiente .....	6.20
Figura 6.22: Comparativa de resultados entre MEF y TLS .....	6.24
Figura 6.23: Comparativa de los tres métodos: MEF, CLD y TLS modular .....	6.24

## Capítulo 7: Otros casos de estudio

Figura 7.1: Evolución según el rozamiento por adherencia ( $m$ ) para pieza Finita .....	7.2
Figura 7.2: Resultado para valores extremos de rozamiento, pieza Infinita .....	7.4

Figura 7.3: Aproximación de las curvas tensiones-deformaciones unitarias. Sin endurecimiento (a) y con endurecimiento (b).....	7.5
Figura 7.4: Comparativa de resultados para un mismo material (A92024) sin endurecimiento y con endurecimiento por deformación.....	7.7
Figura 7.5: Biela de motor de acero forjado.....	7.8
Figura 7.6: Álabes de turbina .....	7.10
Figura 7.7: Estabilización de rotura de pómulo mediante inserto de titanio.....	7.11
Figura 7.8: Modelo Modular de Endurecimiento 1 .....	7.12
Figura 7.9: Comparativa entre los 3 Modelos de Endurecimiento para A92024.....	7.13
Figura 7.10: Datos de fluencia ofrecidos por DEFORM 2D.....	7.16
Figura 7.11: Comparativa para aluminio A95052 con endurecimiento, $n=0.09$ .....	7.16
Figura 7.12: Comparativa para acero G10450 con endurecimiento, $n=0.10$ .....	7.17
Figura 7.13: Comparativa para acero G10080 con endurecimiento, $n=0.17$ .....	7.19
Figura 7.14: Comparativa para Titanio R50250 con endurecimiento, $n=0.23$ .....	7.20
Figura 7.15: Comparativa para la superaleación N02211 con endurecimiento, $n=0.21$ ...	7.22
Figura 7.16: Comparativa para la superaleación N06600 con endurecimiento, $n=0.20$ ...	7.22
Figura 7.17: Configuración punzón inclinado.....	7.23
Figura 7.18: Modelo punzón inclinado .....	7.24
Figura 7.19: Instantes iniciales de la indentación.....	7.24
Figura 7.20: Adaptación del modelo modular .....	7.25
Figura 7.21: Esquema para modelo inclinado.....	7.25
Figura 7.22: Configuración final para punzón inclinado. ....	7.27
Figura 7.23: Resultados para distintos valores de inclinación.....	7.27
Figura 7.24: Detalle de la deformación inicial .....	7.28
Figura 7.25: Resultados para distintas inclinaciones con TLS mediante BRT.....	7.28
Figura 7.26: Distinción de tratamiento: Modelo de punzón inclinado a) y punzón plano b) .....	7.29
Figura 7.27: Comparativa TLS vs MEF para 20° de inclinación .....	7.29
Figura 7.28: Comparativa TLS vs MEF para 45° de inclinación .....	7.30

## Capítulo 8: Ensayos

Figura 8.1: Máquina de ensayos (a) y accesorios para ensayos de compresión (b) .....	8.2
--	-----

Figura 8.2: Bloques patrones. Sumatorio (a) y bloque único (b) .....	8.2
Figura 8.3: Útil de compresión (a), útil compuesto (b) .....	8.3
Figura 8.4: Fallo de inclinación en el ensayo de E3.....	8.3
Figura 8.5: Fresado del canto del indentador .....	8.4
Figura 8.6: Indentador con base irregular (a), indentador después del fresado (b) .....	8.4
Figura 8.7: Sistema Electromecánico de Testeo.....	8.4
Figura 8.8: Horno de recocido. Exterior (a) e interior (b).....	8.5
Figura 8.9: Fabricación de probeta de Plomo. Molde y Modelo (a), moldeo en arena (b), enfriamiento de probeta (c) y lingote en bruto final (d) .....	8.7
Figura 8.10: Probeta ensayo sin indentar (a), indentada (b) .....	8.7
Figura 8.11: Varillas de estaño .....	8.8
Figura 8.12: Lingote de estaño (a), probetas en bruto (b).....	8.9
Figura 8.13: Mecanizado probeta estaño (a), probeta final frente a inicial (b).....	8.9
Figura 8.14: Probeta de estaño post ensayo .....	8.10
Figura 8.15: Indentación en Al 2030 .....	8.11
Figura 8.16: Probeta de aluminio EN AW-2030 Recocido .....	8.12
Figura 8.17: Tratamiento térmico de Recocido. ....	8.13
Figura 8.18: Posicionamiento de la probeta sin carga .....	8.13
Figura 8.19: Probeta precargada.....	8.13
Figura 8.20: Resultados de E19-I-4mm/m-1.5-S-6-Al2030R-50x50x30 .....	8.15
Figura 8.21: Ensayos E19, E20 y E21 a 4mm/min.....	8.15
Figura 8.22: Ensayos E22, E23 y E24 a 1mm/s .....	8.16
Figura 8.23: Comparativa entre ensayos a 4mm/min y 1mm/s .....	8.16
Figura 8.24: Media de E19-E22.....	8.17
Figura 8.25: Deformación indentador lateral.....	8.17
Figura 8.26: Deformación indentador frontal.....	8.17
Figura 8.27: Rotura en el extremo de la probeta, vista superior.....	8.18
Figura 8.28: Rotura en el extremo de la probeta, vista lateral.....	8.18
Figura 8.29. Muestras de las probetas para los ensayos de tracción.....	8.19
Figura 8.30: Esquema de la probeta para el ensayo de tracción .....	8.19
Figura 8.31. Rotura dúctil (a) y frágil (b) .....	8.20
Figura 8.32: Resultados ensayo tracción probeta sin recocer.....	8.20

Figura 8.33: Resultados ensayo de tracción probeta recocida.....	8.21
Figura 8.34: Comparación entre ensayo real y DEFORM 2D .....	8.22
Figura 8.35: Deformación obtenida en el ensayo y en DEFORM 3D. (a) pieza e indentador, (b) Detalle deformación con indentador, (c) Detalle deformación sin indentador y (d) Pieza real después del ensayo. ....	8.23
Figura 8.36: Comparación resultados DEFORM 3D, ensayo y modelo TLS .....	8.23
Figura 8.37: Comparación de resultados con distintos valores de m .....	8.24
Figura 8.38: Deformación sufrida por el indentador en la realización del ensayo de indentación.....	8.24
Figura 8.39: Incorporación de elemento auxiliar de empuje. (a) perfil y (b) frontal .....	8.25
Figura 8.40: Detalle de la deformación del punzón. (a) pieza con punzón, (b) deformación en pieza y (c) deformación en punzón .....	8.25
Figura 8.41: Perturbaciones en las simulaciones con DEFORM 3D .....	8.26
Figura 8.42: Deformación con punzón deformable. (a) solo punzón, (b) punzón y pieza .....	8.26
Figura 8.43: Comparación con punzón deformable .....	8.27
Figura 8.44: Comparación de los resultados de DEFORM con los del ensayo real .....	8.27
Figura 8.45: Comparación de resultados del ensayo con resultados de ABAQUS 2D.....	8.28
Figura 8.46: Planteamiento de la pieza de trabajo en ABAQUS .....	8.29
Figura 8.47: Deformación obtenida con ABAQUS. (a) corte de simetría, (b) perspectiva de la deformación.....	8.29
Figura 8.48: Comparación resultados ensayo, ABAQUS, DEFORM y modelo TLS.....	8.29
Figura 8.49: Comparativa con ABAQUS 3D .....	8.30
Figura 8.50: Resolución de la simulación con contacto en ABAQUS. (a) malla fina, (b) malla gruesa.....	8.30
Figura 8.51: Resultados para las simulaciones de la 1 a la 8 .....	8.31
Figura 8.52: Resultados para las simulaciones de la 7 a la 10 .....	8.32

## Capítulo 9: Aplicaciones

Figura 9.1: Proceso de Indentación Múltiple: (a) punzón hemisférico, (b) punzón esférico y (c) punzón plano con chaflán .....	9.2
Figura 9.2: Forja con matriz compleja.....	9.3
Figura 9.3: Proceso de Forja con creación de rebaba .....	9.4

## Thesis English Summary

Figure E.1: Module B or second module of the Modular Model implemented .....	E.4
Figure E.1: Anneal sequence .....	E.6
Figure E.3: Comparative between UBT, Trials and FEM .....	E.6

## Anexo I: Recopilación histórica sobre la evolución del estudio de la plasticidad desde 1980 hasta la actualidad

Figura A.1.1: C.A. Coulomb.....	A.1.1
Figura A.1.2: M.T. Huber (izq) y von Mises (dcha).....	A.1.2
Figura A.1.3: Hilda Geiringer .....	A.1.3
Figura A.1.4: W. Prager.....	A.1.4
Figura A.1.5: Rodney Hill.....	A.1.6
Figura A.1.6: Frédéric Barlat.....	A.1.9
Figura A.1.7: AutoForm .....	A.1.9
Figura A.1.8: Bauschinger y el efecto Bauschinger .....	A.1.11
Figura A.1.4: ECAE .....	A.1.12
Figura A.1.5: Nemat-Nasser .....	A.1.14

## Anexo II: Resultados de endurecimiento por deformación

Figura A.2.6: Resultados para N02211, $n=0.21$ .....	A.2.2
Figura A.2.2: Resultados para N06600, $n=0.20$ .....	A.2.2
Figura A.2.3: Resultados para Aluminio A91070, $n=0.21$ .....	A.2.3
Figura A.2.4: Resultados para A96082, $n=0.11$ .....	A.2.3
Figura A.2.5: Resultados para A93003, $n=0.12$ .....	A.2.4
Figura A.2.6: Resultados para Acero G10080, $n=0.17$ .....	A.2.4
Figura A.2.7: Resultados para S30400, $n=0.19$ .....	A.2.5
Figura A.2.8: Resultados para R58010, $n=0.17$ .....	A.2.5
Figura A.2.9: Resultados para R50250, $n=0.23$ .....	A.2.6
Figura A.2.10: Resultados para R50400, $n=0.20$ .....	A.2.6
Figura A.2.11: Resultados para A92024, $n=0.10$ .....	A.2.7
Figura A.2.12: Resultados para A95052, $n=0.09$ .....	A.2.7

Figura A.2.13: Resultados para A96062, $n=0.10$ .....	A.2.8
Figura A.2.14: Resultados para Acero G10450, $n=0.10$ .....	A.2.8
Figura A.2.15: Resultados para R53400, $n=0.02$ .....	A.2.9
Figura A.2.16: Resultados para G33106, $n=0.08$ .....	A.2.9
Figura A.2.17: Resultados para G52986, $n=0.12$ .....	A.2.10



# Listado de Tablas

---

*Análisis, Desarrollo y Validación del Método del Límite Superior en Procesos de Conformado por Indentación*

---



## Capítulo 4: Aplicación del TLS mediante módulos de BRT en indentación

Tabla 0.1: Resultados de $p/2k$ en relación a la base 3.....	4.36
--	------

## Capítulo 5: Estudio de la deformación con punzón plano

Tabla 5.1: Resultados de $p/2k$ para el módulo C .....	5.17
Tabla 0.2: Valores de $p/2k$ para $\theta$ óptimo .....	5.18

## Capítulo 6: Estudio y Análisis comparativo mediante el Método de Elementos Finitos

Tabla 6.1: Sistema de Unidades del DEFORM.....	6.7
Tabla 6.2: Características malla automática .....	6.9
Tabla 6.3: Características del segundo mallado .....	6.11
Tabla 6.4: Características del tercer mallado.....	6.12
Tabla 6.5: Características del 7º mallado .....	6.16
Tabla 6.6: Clasificación de piezas .....	6.19
Tabla 6.7: Diferencias entre ambos solucionadores .....	6.22

## Capítulo 7: Otros casos de estudio

Tabla 7.1: Valores de la evolución de $p/2k$ para distintos valores de $m$ y factores de forma en pieza finita .....	7.3
Tabla 7.3: Valores de $n$ y $K$ para diferentes metales y aleaciones.....	7.5
Tabla 7.6: Relación de $K$ y $n$ para materiales simulados (Designación UNS) .....	7.15
Tabla 7.7: Resultados para aluminio A95052 con endurecimiento, $n=0.09$ .....	7.17
Tabla 7.8: Resultados para acero G10450 con endurecimiento, $n=0.10$ .....	7.18
Tabla 7.9: Resultados para acero G10080 con endurecimiento, $n=0.17$ .....	7.19
Tabla 7.10: Resultados para Titanio R50250 con endurecimiento, $n=0.23$ .....	7.20
Tabla 7.11: Resultados para la superaleación N02211 con endurecimiento, $n=0.21$ .....	7.21
Tabla 7.12: Resultados para la superaleación N06600 con endurecimiento, $n=0.20$ .....	7.22

## Capítulo 8: Ensayos

Tabla 8.1: Resultados E19-I-4mm/m-1.5-S-6-Al2030R-50x50x30 .....	8.14
Tabla 8.2: Datos obtenidos en el ensayo de tracción para el aluminio EN AW-2030 recocido .....	8.22

## Thesis English Summary

Table E.1: Hardening Classification by $n$ .....	E.5
--	-----

## Anexo II: Resultados de endurecimiento por deformación

Tabla A.2.1: Aplicación del modelo de endurecimiento según $n$ .....	A.2.1
--	-------

# CAPÍTULO 1

---

## GENERALIDADES

*Análisis, Desarrollo y Validación del Método del Límite Superior en Procesos de Conformado por Indentación*

---



## Índice Capítulo 1

1.1	Ámbito de la tesis.....	1.1
1.2	Objetivo de la Tesis.....	1.3
1.3	Estructura de la tesis.....	1.5





## 1. GENERALIDADES

### 1.1 Ámbito de la tesis

La presente tesis se enmarca dentro del campo de la fabricación, en concreto, en los procesos de conformado por deformación plástica (PCDP). Dentro de esta gran familia, el conformado plástico en sí es considerado como el proceso más antiguo para la fabricación de piezas metálicas y, gracias al notable desarrollo tecnológico que ha sufrido hasta hoy día, dispone de una amplia variedad de técnicas adaptadas para las distintas aplicaciones que abarcan desde productos tratados como materia prima para otros procesos de fabricación hasta componentes finales.

En la actualidad, el conformado plástico sigue representando la mejor opción para la obtención de piezas con diversidad de formas y tamaños, conllevando adicionalmente la ventaja del incremento de las propiedades mecánicas y el refinamiento estructural del material a deformar. La evolución que ha soportado en los distintos procedimientos para deformar o moldear el metal ha permitido un mayor conocimiento del proceso y su mayoritaria extensión en la industria. Los hallazgos más antiguos sobre procesos de conformado datan del año 8000 a.C. en la región de Anatolia, cuando se trataban materiales como el oro y el cobre, martilleando y calentando el material hasta obtener la forma requerida. Los primeros objetos fabricados de esta forma se utilizaban como piezas decorativas. Fue con la mejora del proceso cuando comenzaron a aparecer los primeros utensilios y armas [1-3].

Dentro del campo de los procesos de conformado por deformación plástica, la presente tesis se centra en los que logran la deformación del metal a partir de la aplicación de esfuerzos de compresión directa, tal como sucede en los procesos de forja. A su vez, dentro de este campo, se ajusta el estudio al proceso de indentación, caso particular de la forja, en el que el material a deformar es sustancialmente mayor que la matriz. A través del estudio se analizará la influencia de factores intrínsecos como la influencia del material, su endurecimiento o la geometría de la pieza; así como factores extrínsecos entre los que se destaca el rozamiento existente entre las superficies de contacto herramienta-pieza.

El proceso de indentación se estudiará como proceso de fabricación para conformar piezas y no sólo como proceso para realizar ensayos, convencionalmente utilizados para la

caracterización del material en la obtención de parámetros tecnológicos como la dureza del mismo.

Será necesario realizar una serie de aclaraciones y acercamientos teóricos para la total comprensión de este proceso de conformado plástico en particular. El proceso analizado conlleva un flujo de material en el que se evita desechar o retirar parte del mismo. La forja y, por su parte, la indentación, son procesos de deformación plástica, clasificados como procesos mecánicos en los que el material de partida se encuentra en estado sólido [4]. Atendiendo a la industria moderna, sería posible afirmar que la práctica totalidad de las piezas mecánicas ha pasado alguna vez, en alguno de los estados de la fabricación, por algún proceso de conformado por deformación plástica (PCDP), lo que viene a demostrar la gran importancia que tiene este tipo de procesos, además del gran interés que suscitan al obtener productos con propiedades mecánicas mejoradas y ser relativamente económicos y con menos impacto ambiental, así como al reducido desperdicio de material que originan.

El requisito básico de los materiales sometidos a este tipo de procesos es que sean dúctiles, con capacidad para admitir grandes deformaciones mecánicas en frío, sin llegar a la rotura. Este tipo de materiales se conoce por tener una curva de tensión-deformación de mayor longitud que la de los materiales frágiles, como se aprecia en la Figura 1.1



Figura 1.1: Comparativa curvas tensión/deformación

Generalmente el proceso se lleva a cabo a temperatura de trabajo elevada (trabajo en caliente), lo que requerirá un esfuerzo menor de deformación, ya que se modificará la estructura del material produciendo un ablandamiento del mismo y, posteriormente, una recristalización más rápida, teniendo presente que el estudio queda restringido a materiales metálicos.

Mediante la teoría de la plasticidad, se obtienen una serie de relaciones que permiten determinar la fluencia del material y proporcionan una estimación de los esfuerzos necesarios para conseguir la deformación requerida. Los coeficientes de rozamiento presentes en este tipo de procesos deben ser tenidos en cuenta para obtener unos resultados más realistas, fiables y precisos. Las superficies del metal y de la herramienta estarán en contacto durante todo el proceso de deformación, por lo que es de vital importancia llegar a analizar el rozamiento existente entre ambas superficies.

Los modelos teóricos de análisis que se pueden utilizar para su estudio se dividen, atendiendo a su naturaleza, en métodos numéricos y métodos analíticos. Actualmente y

debido a la gran complejidad que presenta la aplicación de los métodos analíticos, se ha extendido el uso de los métodos numéricos, como los basados en elementos finitos. No obstante, el presente estudio centrará su investigación en los métodos analíticos.

Es sabido que el análisis de los procesos de deformación posee una complejidad elevada. Es por ello que, para posibilitar la implantación y desarrollo de los métodos analíticos, se llevan a cabo ciertas simplificaciones basadas en condiciones ideales. Este tipo de hipótesis simplificadoras facilitan el enfrentamiento y resolución de un problema real si bien, cuando la pieza presenta una geometría más compleja, los métodos pueden no resultar tan precisos, a la vez que los valores calculados podrían presentar discrepancias con los valores obtenidos de forma experimental. Esto ha originado que, frente a los métodos numéricos, ciertos métodos analíticos no se hayan desarrollado de forma tan extensa y presenten una evolución más lenta, no adecuándose al nivel de exigencia en la fabricación.

En los procesos de forja se analiza una pieza sometida a presión entre dos matrices más grandes que el propio material a deformar. Durante la deformación, este material se expandirá a lo largo de las matrices, llegando a ocupar todo el espacio sobrante en el primer instante. Dependiendo de si la forja está restringida o no, ya sea una forja cerrada o abierta, el material puede llegar a sobrepasar las matrices y crear lo que se denomina la rebaba, que será eliminada posteriormente. Frente a los casos genéricos de forja en el que la matriz posee una superficie de contacto extensa, en la indentación, las matrices poseen un tamaño significativamente menor, llegando a ser únicamente un punzón. El material que sufre la deformación, desde los primeros instantes del proceso, sobresale alrededor del punzón y éste se verá introducido en la pieza para conferir la deformación solicitada. Al contrario que con los trabajos de forja, el presente estudio se centra en los procesos de flujo estacionarios como son los de la indentación, en los que la superficie material-herramienta considerada no irá variando con el tiempo. Esto es debido a que el material que asciende durante la deformación no llega a entrar en contacto con la matriz o punzón, por lo que la superficie de contacto siempre tendrá las mismas dimensiones.

## 1.2 Objetivo de la Tesis

Siendo este trabajo la continuación del campo de estudio establecido por el Dr. Martín [5], el objetivo principal será replantear y desarrollar un método de análisis teórico con el que establecer un valor mínimo de la carga necesaria para lograr la conformación del material mediante los procesos de indentación.

Con el desarrollo que está sufriendo la industria manufacturera actualmente, presentando nuevos procesos de fabricación centrados en la deformación incremental, el proceso de indentación se perfila como uno de los procesos claves. Su estudio mediante técnicas que simplifique la consecución de los esfuerzos necesarios para llevar a cabo dicha deformación resultan muy interesante de cara a su implementación y desarrollo.

En la presente Tesis Doctoral se analiza el proceso de indentación desde la perspectiva de la resolución analítica mediante el Teorema del Límite Superior, bajo su

configuración modular. Se pretende elaborar un modelo sencillo que aporte los esfuerzos necesarios para llevar a cabo la deformación requerida y que ofrezca la posibilidad de incorporar parámetros significativos del proceso de deformación, como puede ser el endurecimiento o el rozamiento. De esta forma se acomete la ampliación de la usabilidad del método modular, abriéndolo a otros campos de estudio. De forma conjunta con los estudios existentes sobre la aplicación del teorema a diversos procesos de fabricación, resulta interesante estudiar la indentación bajo este método con el fin de abarcar la mayor parte del campo de los procesos de conformado por deformación plástica y por la importancia que está tomando en estos últimos años debido, como se ha comentado, al desarrollo de nuevos procesos de fabricación.

Es cierto que la evolución de los métodos numéricos ha facilitado la resolución de este tipo de problemas, relegando a un segundo plano los métodos analíticos, considerados algebraicamente más complejos pero que posibilitan su utilización en diversos casos. No obstante, los métodos numéricos presentan ciertos inconvenientes siendo en muchos casos complicado diferenciar de forma explícita los parámetros que intervienen en el proceso. Por otro lado, llegar al completo dominio de este tipo de programas que facilitan la aplicación de los métodos numéricos, basados, por ejemplo, en elementos finitos, requieren mucha experiencia. Resulta común, durante la implementación del proceso en este tipo de programas, la introducción de uno de los factores o parámetros de forma errónea, arrastrando este error durante toda la simulación. Si el usuario no se percató de ello, por no tener pleno conocimiento del programa o por no haberse percatado de la introducción de dicho error, la plataforma de resolución puede, igualmente, resolver el problema implementado. Los resultados que se obtendrán serán, obviamente, erróneos, pero se presentarán como aceptables debido al desconocimiento de ese error introducido.

Además, el teorema tratado en este estudio, presenta una buena adaptación a los diversos procesos estudiados hasta la fecha, ofreciendo valores cercanos a la realidad mediante una ejecución sencilla, una vez desarrollado el modelo de aplicación del mismo. Se trabaja con tiempos de resolución muy bajos en comparación con los métodos numéricos, pudiendo ofrecer un entorno de trabajo simple que permita, mediante la introducción de factores conocidos, obtener el esfuerzo requerido sin mayor desarrollo ni problemática.

Por tanto, en la siguiente Tesis Doctoral se presenta una alternativa a los métodos numéricos, basada en el método analítico del Teorema del Límite Superior mediante la aplicación de Bloques Rígidos Triangulares [6-9]. Este planteamiento posibilita considerar de forma independiente diferentes parámetros intervinientes en el proceso de deformación, como pueden ser la geometría de la pieza, la superficie en contacto con la herramienta, el tipo de material, el coeficiente de rozamiento en su doble vertiente de adherencia y de deslizamiento, la temperatura de trabajo y el endurecimiento del material, entre otros.

El método, al igual que en estudios anteriormente mencionados, se aplicará a diversas configuraciones geométricas, siendo la limitación del método la consideración del

establecimiento de una deformación plana, pudiendo abrir camino en un futuro próximo a distintos estudios del caso.

### 1.3 Estructura de la tesis

Una vez establecido los objetivos de la tesis, se presenta la estructura de la misma para alcanzar las metas propuestas.

La presente tesis se estructura mediante una breve introducción a la Teoría de la Plasticidad, centrándose ésta en los Procesos de Conformado por Deformación Plástica (PCDP) con la intención de contextualizar la base de los estudios realizados en la investigación, haciéndose énfasis en el Teorema del Límite Superior, método analítico desarrollado. A continuación, en el capítulo destinado al estado del arte, se procede a revisar la evolución histórica a través de las técnicas e investigadores más relevantes hasta la actualidad.

El desarrollo de la metodología propuesta se lleva a cabo en los capítulos 4 y 5. En el capítulo 4 se realiza una introducción de la aplicación del Teorema del Límite Superior a un caso particular de indentación y se muestra la evolución que se ha llevado a cabo hasta llegar al modelo final aplicado en los siguientes capítulos. En el capítulo 5 se analizan las distintas etapas que se han debido afrontar hasta alcanzar la solución general de aplicación del método, en el caso particular del punzón plano, realizando una comparativa con el método del Campo de Líneas de Deslizamiento. Es en esta fase del estudio donde se contempla la división de las piezas de estudio en grupos de piezas finitas e infinitas, definiendo ambos conceptos, así como el Factor Geométrico de Ajuste aplicado al modelo final.

Expuesta la metodología y el modelo de aplicación para el caso del proceso de indentación, en el capítulo 6 se procede a realizar una comparativa del método analítico con uno de los métodos numéricos más extendidos, como es el Método de los Elementos Finitos. De esta forma, se procede a mostrar las dos plataformas utilizadas, DEFORM y ABAQUS, los resultados arrojados y la comparativa con el modelo desarrollado, mostrando las bondades del método y el ajuste de los resultados finales. Mediante la comparativa con elementos finitos, en el capítulo 7 se procede a plantear el estudio de la indentación introduciendo diversos parámetros, como pueden ser el rozamiento y el endurecimiento por deformación, así como plantear la resolución de casos de indentación con punzón inclinado. Gracias al manejo de los programas mencionados, es posible plantear una comparativa con grupos de materiales de diversa índole, como son los aluminios, titanios, aceros y superaleaciones, así como sus distintas aleaciones, no quedando restringido el estudio a un reducido número de comparativas, mostrando su ajuste para numerosos tipos materiales. En este capítulo se dará cuenta de una comparación de valores y evolución de los mismos, para, mediante las conclusiones finales, reflejar el grado de concordancia entre ambos métodos. En cada uno de los apartados se aprecia que el modelo, seleccionado y adaptado para cada caso de estudio, permite un ajuste de los resultados finales en relación a los

resultados obtenidos con los otros métodos escogidos para realizar la comparativa, presentando el modelo como una alternativa versátil y precisa.

El capítulo 8 describe los ensayos experimentales llevados a cabo con el fin de no solo validar el método mediante la comparativa con otros métodos analíticos o numéricos, sino presentar el ajuste que es posible obtener con el modelo desarrollado comparando los resultados del mismo con los obtenidos de ensayos sobre probetas de aluminio, material que puede ser encontrado ampliamente en la industria actual. Se describe la metodología seguida para llevar a cabo los ensayos, así como la fabricación de distintas probetas y el uso de otros materiales previos al aluminio para ajustar los ensayos y definir el alcance de los mismos. Finalmente, se contraponen los resultados obtenidos de los ensayos, del Método de Elementos Finitos y de método desarrollado en aplicación del Teorema del Límite Superior, volviendo a mostrar concordancia entre las soluciones arrojadas.

Concluye el cuerpo de la tesis con el capítulo 9 y 10, reservado a las posibles aplicaciones del modelo desarrollado y las conclusiones y las líneas de desarrollo futuro de la investigación. En este décimo capítulo se exponen tanto las conclusiones particulares como las generales, en virtud de los diferentes aspectos tratados, como son la metodología empleada o las ventajas y limitaciones del método propuesto. Se establecen en este apartado, tal y como ya se ha indicado anteriormente, las posibles líneas futuras de actuación con las que poder aumentar el ámbito de aplicación del método.

El cuerpo central se finaliza con el correspondiente resumen en inglés, presentado como English Summary, donde se hace un breve repaso al conjunto de la tesis, incluyendo las conclusiones del capítulo 10. La presente Tesis Doctoral se complementa con un conjunto de anexos que desarrollan partes que, por su extensión o contenido, podrían dificultar el seguimiento lineal de la exposición, como es la Recopilación histórica sobre la evolución del estudio de la plasticidad desde 1980 hasta la actualidad y los distintos resultados de endurecimiento por deformación, habiéndose segregado del cuerpo central de los capítulos correspondientes donde se les hace referencia.

## Referencias

- [1] P. Groche, D. Fritsche, E. A. Tekkaya, J. M. Allwood, G. Hirt, and R. Neugebauer, "Incremental bulk metal forming," *CIRP Annals - Manufacturing Technology*, vol. 56, pp. 635-656, 2007.
- [2] I. De Ryck, A. Adriaens, and F. Adams, "An overview of mesopotamian bronze metallurgy during the 3rd millennium bc," *Journal of Cultural Heritage*, vol. 6, pp. 261-268, 2005.
- [3] O. D. Sherby and J. Wadsworth, "Ancient blacksmiths, the iron age, damascus steels, and modern metallurgy," *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 117, pp. 347-353, 2001.
- [4] A. H. Committee, *Handbook of forming and forging*. New York (USA): American Society for Metals, 1978.
- [5] F. Martín, "Desarrollo, integración y optimización en el estudio del proceso de forja mediante el teorema del límite superior a través del modelo de bloques rígidos triangulares," Ingeniería de Fabricación, Universidad de Málaga, Málaga, 2009.
- [6] H. Kudo, "An upper-bound approach to plane-strain forging and extrusion-i," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 1, pp. 57-83, 1960.
- [7] H. Kudo, "An upper-bound approach to plane-strain forging and extrusion-ii," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 1, pp. 229-252, 1960.
- [8] H. Kudo, "An upper-bound approach to plane-strain forging and extrusion-iii," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 1, pp. 366-368, 1960.
- [9] W. Johnson, "Estimation of upper-bound loads for extrusion and coining operations," *Proc. Inst. Mech. Eng.*, vol. 173, 1959 1959.





# CAPÍTULO 2

---

## INTRODUCCIÓN A LA DEFORMACIÓN PLÁSTICA

*Análisis, Desarrollo y Validación del Método del Límite Superior en Procesos de Conformado por Indentación*

---



## Índice Capítulo 2

2.1 Introducción a la Plasticidad .....	2.1
2.2 Evolución de las técnicas de deformación plástica.....	2.5
2.3 Indentación: Proceso de conformado por deformación plástica mediante compresión directa.....	2.7
2.4 Rozamiento en los PCDP .....	2.12
2.5 Método de Análisis.....	2.15
2.5.1 Deformación Homogénea.....	2.16
2.5.2 Análisis Local de Tensiones .....	2.18
2.5.3 Campo de Líneas de Deslizamiento .....	2.20
2.5.4 Teoremas del Límite .....	2.24
2.5.4.1 Límite Inferior.....	2.24
2.5.4.2 Límite Superior.....	2.25
2.5.4.3 Límite superior en Deformación Plana .....	2.28
2.5.4.4 Límite Superior mediante Bloques Rígidos Triangulares: propuesta Modular.....	2.31



## 2. INTRODUCCIÓN A LA DEFORMACIÓN PLÁSTICA

### 2.1 Introducción a la Plasticidad

La Teoría de la Plasticidad se basa en el estudio matemático de los esfuerzos y deformaciones de sólidos deformables plásticamente, especialmente en metales. Conlleva un objetivo doble. Por una parte, intenta dar explicación a las relaciones entre los esfuerzos y deformaciones que tienen lugar y, por otra parte, desarrollar técnicas matemáticas para calcular las distribuciones de esfuerzos y deformaciones presentes en cuerpos distorsionados permanentemente en cualquier dirección [1-4]. Concretamente, la misión de las teorías de conformado plástico consiste en proporcionar una serie de conocimientos a partir de los cuales se pueda elegir el equipo y planificar cada pasada del mismo sobre el material a deformar, obteniendo una productividad máxima. Esto puede permitir también llegar a proyectar el equipo de trabajo o maquinaria.

Un acercamiento riguroso a los casos resulta muy complicado y, por ello, es necesaria la simplificación del estudio. El estudio de estos casos simplificados o idealizados ofrece un conocimiento que puede tener un valor considerable para predecir la influencia de las variables reales sobre la carga de trabajo, la fluencia del metal y, por ende, permitir elegir las condiciones de trabajo para el resultado deseado, reduciendo considerablemente el número de ensayos necesarios.

Cuando se trabaja con grandes esfuerzos, se consigue alcanzar una fluencia considerable en el material, conociéndose esta situación como deformación plástica. La fluencia está provocada por las tensiones que actúan y es posible establecer la tensión de deformación considerando una combinación de las mismas [5]. Para ello existen diversos criterios de fluencia, hipótesis concernientes a la superación del límite elástico del material bajo cualquier combinación posible de tensiones.

Los criterios de fluencia resultan herramientas útiles para la predicción de las tensiones mecánicas o de los esfuerzos que actúan durante la deformación plástica del material, arrojando las fuerzas que han de ser aplicadas para conseguir dicha deformación. En el conformado de metales es primordial obtener un cambio

permanente, por lo que la teoría del conformado comienza con las tensiones que provocan la deformación plástica, siendo los criterios de fluencia los que determinan cuando el esfuerzo que se aplica sobre el material a deformar es suficientemente grande para conseguir que fluya y, por tanto, comience la deformación permanente.

De los criterios de fluencia, el más destacado es el criterio de von Mises (1913), que mantiene que el flujo plástico comienza cuando la energía de deformación debida a los esfuerzos cortantes (energía de distorsión) alcanza un valor determinado, comprendiendo únicamente las tensiones principales que actúan, a su vez, sobre los planos principales [6, 7]. En el Anexo I, se expone una recopilación histórica sobre la evolución de la plasticidad desde 1980 hasta la actualidad. No obstante, como primera aproximación, se muestra en el Esquema 2.1 la evolución de los parte de los Criterios de Fluencia a partir del siglo XX.

La base de gran parte de los cálculos de conformado de metales, son las Curvas de Tensión-Deformación, mostradas anteriormente en la Figura 1.1. En el caso considerado, se centrará la atención únicamente a la parte de las deformaciones plásticas, ignorando la fase elástica.

Es necesario aclarar que la deformación se basará en la conocida deformación logarítmica (Ec. 2.1) o natural .

$$\varepsilon = \int \frac{dl}{l} = \ln\left(\frac{l}{l_0}\right) \quad \text{Ec. 2.1}$$

No se utilizará la deformación lineal o convencional, empleada en los ensayos iniciales (Ec. 2.2) ya que para ejemplos de forja no se obtienen resultados reales.

$$e = (l - l_0)/l_0 \quad \text{Ec. 2.2}$$

Gracias a la consideración de Deformación Plana, en la que no se considera deformación en la tercera dirección de deformación, es posible simplificar la problemática. Toda la deformación se producirá en los planos perpendiculares a esta tercera dirección (comúnmente se tratará de las direcciones XOY), por lo que puede ser representada en un diagrama de bidimensional, planteando una resolución más sencilla.

Este diagrama bidimensional, en el que se pueden representar los esfuerzos cortantes máximos, identificados con las direcciones de deslizamientos, se conoce como Campo de Líneas de Deslizamiento. Este planteamiento es matemáticamente riguroso, pero se basa en la experiencia, y es aplicable para condiciones de Deformación Plana. Está compuesto por familias de líneas que se cruzan entre sí en ángulo recto. Debido a que toda la deformación es debida a un cizallamiento puro y se supone producida por esfuerzos cortantes puros, en el instante de la deformación plástica, la tensión cortante a lo largo de las líneas de deslizamiento adquiere, en

cualquier punto, un valor  $k$  igual a la carga de deformación permanente hallada mediante un ensayo de cizalladura pura.

La tensión de cizalladura,  $k$ , es posible obtenerla a partir de la relación existente entre la tensión de fluencia por tracción. Para casos de deformación plana, según el criterio de von Mises, se relaciona mediante la Ec. 2.3

$$2k = \frac{2}{\sqrt{3}} = 1,155Y \quad \text{Ec. 2.3}$$

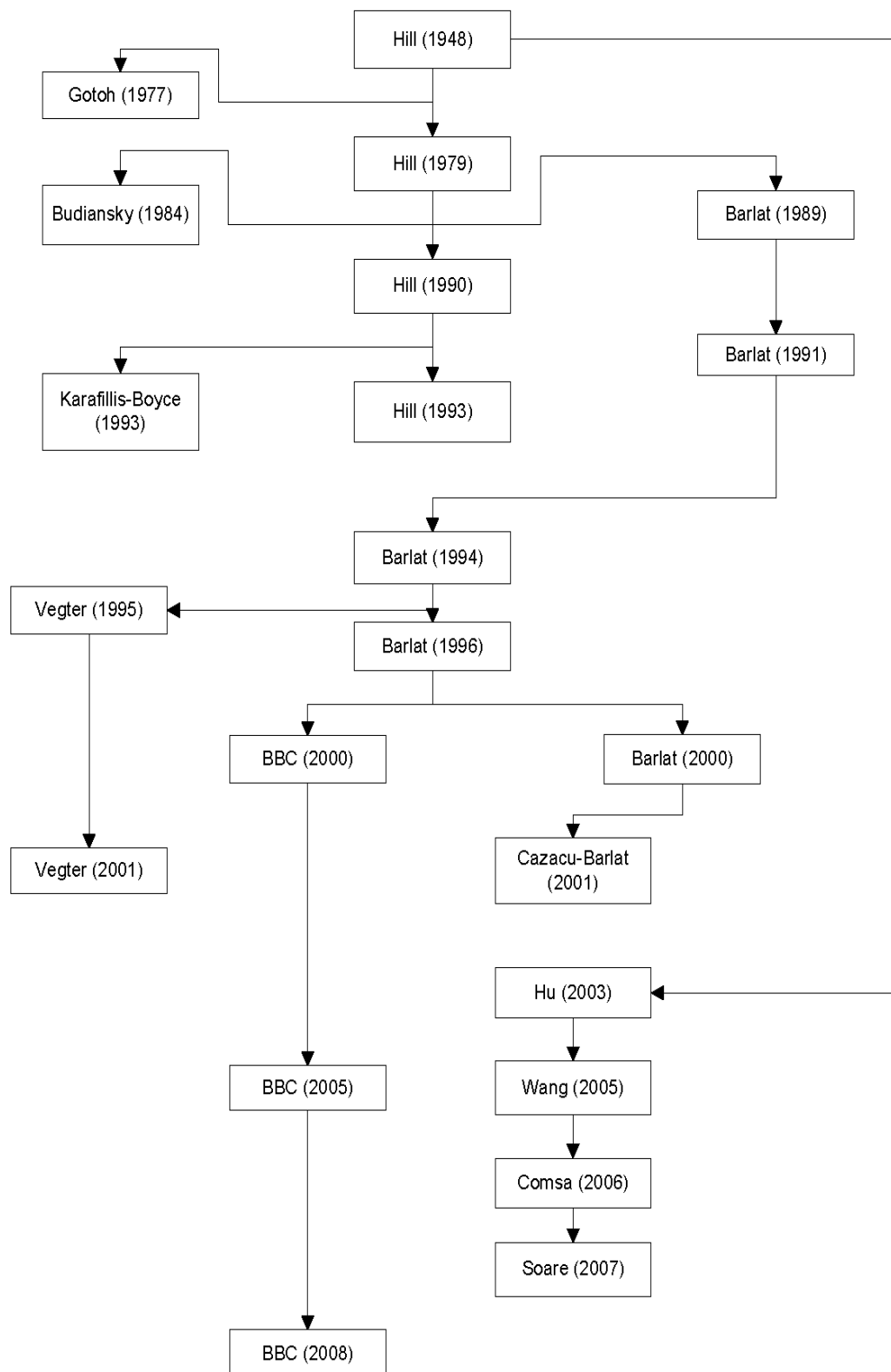
Siendo  $Y$  la tensión de fluencia determinada por diversos ensayos mecánicos.

En muchos casos, no es posible calcular una solución exacta para la carga que causa la deformación plástica y, en consecuencia, se buscan métodos que aproximen el resultado lo más cercano a los aportados empíricamente por ensayos. Así, un método ampliamente conocido es la Técnica del Límite de Cargas, desarrollada por Johnson y Mellor [8], entre otros autores. Johnson define un límite superior por exceso, en el que la carga será lo suficientemente grande para deformar la pieza, y un límite inferior por defecto, en el que la carga será lo suficientemente pequeña como para no conseguir deformar la pieza. Entre estos dos límites se encuentra la carga real de deformación. La aplicación del método descansa, por tanto, en la habilidad de elegir los modelos de deformación que hacen esa diferencia lo más pequeña posible, acercándose así, cada vez más, a la carga real.

Las soluciones obtenidas con este proceso, por exceso, serán soluciones del límite superior, que se basan en el flujo del material. Pero, como se verá más adelante, en la aplicación del Teorema del Límite Superior (TLS), no será necesario desarrollar por completo estos campos de líneas de desplazamiento, dado que se aplica una simplificación adicional.

Gracias a la evolución de la informática, algunos de los criterios citados anteriormente se han visto implementados en programas de elementos finitos, mediante simulaciones de procesos específicos de deformación plástica. No obstante, los métodos analíticos siguen practicándose y se observan simulaciones de procesos bastante exitosas.

La presente Tesis Doctoral sigue la línea de investigación de Hill (1993), aunando el progreso conseguido por diversos autores posteriores y centrándose en la técnica desarrollada por F. Martín [9], proponiendo una aplicación modular del TLS mediante módulos compuestos por Bloques Rígidos Triangulares (BRT), como se mostrará más adelante.



Esquema 2.1: Evolución Criterios de Fluencia



## 2.2 Evolución de las técnicas de deformación plástica

La metalurgia se considera una de las tres tecnologías más comunes para trabajar el metal y conseguir productos finales a partir de diferentes procesos. La historia de la forja se remonta a los tiempos del Neolítico, cuando el hombre comenzó a producir herramientas y ornamentos a partir de metales elementales como el oro, la plata y el cobre [10]. El trabajo metalúrgico más antiguo conocido data del año 8000 a.C., originario de Anatolia [11] y consistía en el martilleo continuo al que se sometían metales como el oro o el cobre en diferentes regiones del Medio Oriente. Se trabajaba sobre esos metales en crudo ya que las técnicas de refinamiento eran aún desconocidas. En artículos como el de Thomsen [12] se muestra la posibilidad de fabricar componentes de plata u oro utilizando herramientas del mismo material. Esto explicaría por qué las herramientas rara vez se encuentran en emplazamientos arqueológicos, ya que el material probablemente sería refundido. No sería hasta el año 4000 a.C. cuando se desarrollaría un método útil para purificar los metales mediante reacciones químicas, tratando el material en estado líquido.

Durante el Eneolítico, o Edad del Cobre, se descubre que martilleando de forma repetida el metal, se le confería un aumento en la dureza. Es el deseo de aumentar dicha resistencia lo que da lugar a la aparición de las diferentes aleaciones, durante la Edad de Bronce y Edad del Hierro, que fueron apareciendo conforme se desarrollaban métodos que permitían un aumento en las temperaturas necesarias para dar forma y fundir metales como el hierro [13, 14]. Sobre el 3.300 a.C. las herramientas de bronce eran fabricadas de forma que se les confería una durabilidad mayor, si bien se asume que las armas realizadas con este material se utilizaban más para conferir fastuosidad al propietario de las mismas que para su uso en la batalla. Cabe resaltar el famoso disco celeste de Nebra [10], que fue, con toda probabilidad, utilizado con fines astronómicos. Este elemento tiene una edad de unos 3.600 años (Figura 2.1).



Figura 2.1: Disco Celeste de Nebra  
Fuente: Museum für Vorgeschichte

Las primeras piezas que se fabricaron con hierro también forman parte del final de la Edad de Bronce. Este hierro, maleable y muy puro, podía encontrarse en forma de meteoritos, primera fuente para este material, lo que subraya la idea de su limitada disponibilidad.

Será sobre el 1.200 a.C. cuando los Hititas, o Hiteos, desarrollan el método para realizar hierro forjado [15]. No obstante, la fundición de los minerales sólo podía darse por debajo de la temperatura de fusión del hierro en esta época, por lo que resultaba una masa esponjosa consistente de mezcla de hierro forjado y escoria. Éste se procesaba de forma repetitiva mediante martilleo y doblado para eliminar la escoria de forma manual.

Fue en China donde surgieron los altos hornos en torno al 200 d.C., lo que dio paso a la simplificación de la producción de hierro, ya que los minerales podían ser fundidos a temperaturas mayores. Alrededor del 300 d.C. ya se usaba en India un proceso para la producción de acero: el hierro era calentado conjuntamente con carbón y vidrio, de esta forma, el vidrio flotaba en la mezcla y se sellaba herméticamente.

No será hasta el siglo XIII cuando se deje de trabajar el metal de forma natural y se dé paso a la fabricación del primer martillo inclinado hidráulico (Figura 2.2) que ayudaría en la forja de barras y láminas metálicas [10]. Esta máquina utilizaba la energía que le confería el agua para elevar un brazo a modo de palanca que tenía en el otro extremo un martillo. Una vez elevado, el herrero era el encargado de dejarlo caer, generando el golpe de forja.

Las primeras laminadoras siguieron a la fabricación de la prensa, de la mano de Leonardo da Vinci. En sus trabajos se han descubierto dibujos y esquemas referentes a una máquina de estas características diseñada en 1480, para laminar el plomo utilizado en las vidrieras de la época [16]. Y también en 1485 se consigue laminar pequeñas láminas de metales preciosos con una laminadora doble manual que se llevó a cabo para acuñar monedas. Tuvieron que pasar cerca de 200 años más para conseguir la primera laminadora capaz de laminar materiales ferrosos, debido, principalmente, al abastecimiento limitado de hierro.

Fue la revolución industrial, a finales del siglo XVIII, la que impulsó el desarrollo de este tipo de maquinarias, bajo la necesidad de trabajar con equipos de mayor capacidad de trabajo. Surgió así, en 1837, el martillo hidráulico de alta velocidad, de la mano de James Naismith, que levantaba el martillo con vapor, y la prensa hidráulica, de la mano de Joseph Bramah [17]. que sustituía la fuerza mediante la presión hidráulica. Esto permitió, entre otros progresos, la fabricación de productos que iban desde armas de fuego hasta piezas de locomotoras. Finalmente, será con el desarrollo de la electricidad y los accionamientos hidráulicos, en el siglo XX, cuando la tecnología para la producción en masa esté finalmente disponible.

Desde entonces y hasta nuestros días, los procesos de fabricación mediante deformación plástica, han ido dando saltos evolutivos según las necesidades de fabricación, abaratamiento de procesos o el descubrimiento de nuevas aleaciones o procesos. Se han desarrollado diferentes tipos de equipamientos y materiales con propiedades y aplicaciones especiales, como pueden ser las prensas mecánicas y las laminadoras de alta velocidad en serie, siendo materiales como el acero bajo en

carbono los que se han visto beneficiados de estos avances, consiguiéndose aleaciones con aluminio, titanio o níquel.

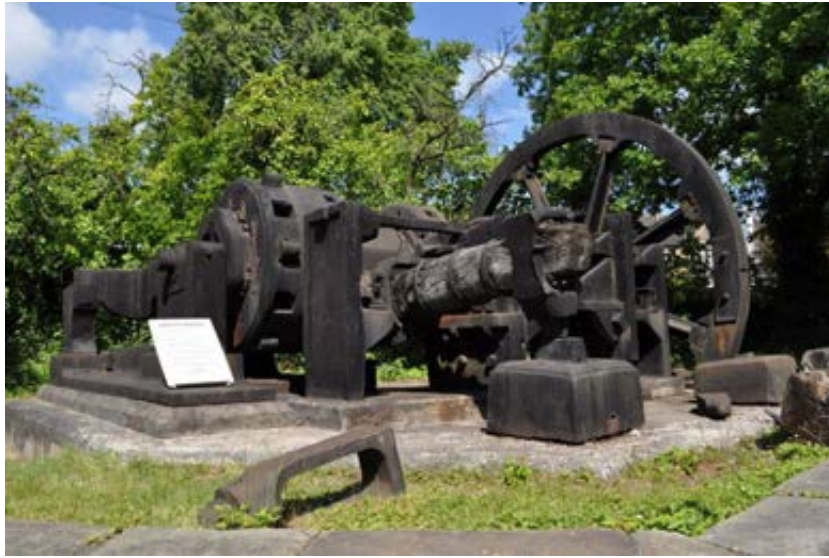


Figura 2.2: Martillo Inclinado hidráulico de Jessop, Abbeydale Industrial Hamleto.

Además, en los últimos años, los análisis matemáticos y la evolución y aplicación de diferentes teorías sobre la plasticidad han dado lugar a productos de mayor calidad y mucho más eficientes en la industria metalúrgica. Esto, entre otros objetivos, es lo que se pretende seguir alcanzando con el presente estudio, es decir, una mejora de la aplicación de este proceso de fabricación, concretamente en el proceso de indentación, con el consiguiente ahorro energético y sencillez en la aplicación del método.

### 2.3 Indentación: Proceso de conformado por deformación plástica mediante compresión directa

El conformado por deformación plástica (PCDP) es considerado como el más adecuado para el conformado de piezas que aseguran un buen comportamiento mecánico. Constituye uno de los procesos generales de fabricación más antiguos que se conocen. El desarrollo tecnológico sufrido hasta la actualidad permite disponer de una amplia variedad de técnicas adaptadas para las distintas aplicaciones, abarcando desde productos que sirven como materia prima para otros procesos de fabricación hasta componentes finales.

Los PCDP se definen como los procesos de fabricación por deformación permanente de un cuerpo sólido, mediante la acción de fuerzas, los cuales conllevan una modificación de la geometría del mismo y una variación de sus características mecánicas. Se benefician del comportamiento plástico de los materiales, centrándose en los metales, para conferir ciertos cambios de forma. Concretamente, en casos de compresión directa, son los esfuerzos de compresión los que principalmente realizan el trabajo necesario para conferir a la pieza la forma y el acabado deseado.

Los materiales ideales para aplicar estos procesos son los materiales con un amplio periodo plástico, ya que pueden experimentar una deformación permanente sin destruir su estructura cristalina.

La importancia tecnológica reside en:

- Cambios significativos en la geometría de la pieza
- Incremento de resistencia
- Volumen constante

Los PCDP se pueden clasificar según el tipo de fuerza aplicada, así:

- *Compresión directa*: La fuerza se aplica a la superficie de la pieza que se trabaja y el metal fluye formando ángulo recto con la dirección de la compresión, como es el caso que nos ocupa, el proceso de indentación.
- *Compresión indirecta*: Se desarrollan fuerzas de compresión elevadas por reacción entre la pieza que se trabaja y la matriz.
- *Tracción*: El metal se adapta al contorno de una matriz por aplicación de fuerzas de tracción.
- *Plegado o flexión*: Supone la aplicación de momentos de flexión.
- *Cizallamiento*: Implica fuerzas lo suficientemente grandes como para provocar el corte del metal en un plano de cizalla.

El caso que aborda el presente estudio, la indentación, es un proceso particular de la forja. En él, la zona de contacto de la matriz es sustancialmente menor que la superficie total de la pieza que se va a deformar plásticamente, lo que lo diferencia de los procesos más comunes de conformado por compresión.

La indentación es un subproceso ampliamente utilizado en la industria, ya sea en piezas que precisen de un conformado previo utilizando esta técnica o piezas en cuya forma final se requiera de cierta indentación.

Un ejemplo práctico se encuentra en el proceso de conformado de anillos de forja sin soldadura (Figura 2.3). Se parte de un tocho metálico al que se le realiza una indentación profunda para, posteriormente, realizar un punzonado y liberar la parte central.

El *penetrado* es un proceso de indentación de la superficie de una pieza de trabajo con un punzón, para producir una cavidad o impresión, sin llegar a pasar a través de ella. La pieza puede estar confinada en una cavidad de la matriz o puede no estar restringida, como es el caso estudiado. Su deformación dependerá de cuánto se limite su flujo conforme descienda el punzón.



Figura 2.3: Proceso fabricación anillos forjados

Fuente: <http://www.bruck-forgings.com>

Se suele emplear para realizar ahuecamientos o formas hexagonales en las cabezas de los tornillos. Después del *penetrado*, puede seguir el *troquelado*, para producir un orificio en la parte trabajada. Se utiliza también para producir regiones huecas en las forjas, mediante un equipo auxiliar de acción lateral.

En este proceso, la fuerza de penetrado dependerá de:

- El área de sección transversal de la pieza y la geometría del punzón
- La resistencia del material
- La magnitud de la fricción en las intercaras de deslizamiento

La presión podrá alcanzar un valor de tres a cinco veces la resistencia del material, que se encontrará casi al mismo nivel de esfuerzo requerido para efectuar la penetración en la prueba de dureza.

Así mismo, el *punzonado de cavidades* o *clavado*, Figura 2.4, es un proceso de indentación en el que se prensa un punzón endurecido con una geometría especial, dentro de la superficie de un bloque de metal, generalmente de acero dulce. Se usa frecuentemente para hacer cavidades en moldes utilizados como matrices para operaciones de formado, como las utilizadas para moldeo de plásticos y fundición en dados.

El punzón generalmente está configurado con el contorno de la pieza que se pretende formar en la matriz. Esta herramienta se temple para posteriormente presionarla poco a poco sobre el bloque matriz recocido, mediante prensa hidráulica, debido a que es necesaria una presión sustancial para producir la impresión deseada. En general, la cavidad de la matriz es poco profunda. Una vez realizado el proceso de deformación, la indentación en sí, se debe eliminar el exceso de material por mecanizado. También puede eliminarse material para facilitar la fluencia del material cuando la huella que se desea dejar es profunda.

Se suele utilizar este proceso debido a que es más sencillo mecanizar la forma positiva que erosionar las cavidades en negativo, ventaja que se ve multiplicada en los casos en los que se tienen que hacer cavidades múltiples en el material que servirá como matriz. En la impresión con macho, los bloques de matriz suelen ser redondos y se refuerzan con un anillo de acero robusto. Al terminar la impresión, el bloque se saca

del anillo de refuerzo, se elimina por mecanizado el metal en exceso y se temple la pieza.

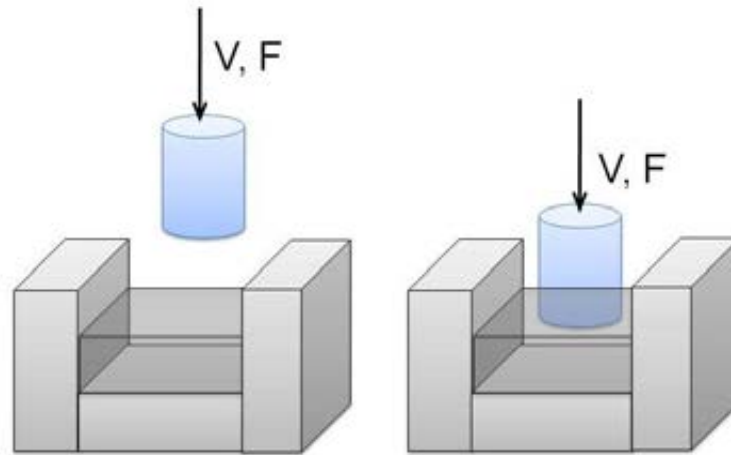


Figura 2.4: Punzonado de cavidades con matriz contenedora

Con un solo macho es posible formar varias cavidades en una sola matriz, por lo que este proceso resulta a menudo más económico que el mecanizado.

También se encuentran otros procesos, clasificados como indentación, en operaciones de grabado y marcado superficial, al igual que en los conocidos ensayos de caracterización superficial. Entre los ensayos de dureza, el ensayo de indentación estática es el método que más uso tiene y mejor está establecido.

La indentación estática se ha venido utilizando desde principios del siglo XX, principalmente en la caracterización de respuestas micro-mecánicas de materiales [18, 19]. Se realiza aplicando una carga, de valor conocido, con un indentador de geometría definida, sobre la superficie de una probeta. Para conocer la dureza, los métodos tradicionales requieren la medición del área de contacto de la impronta producida por el indentador. La geometría del indentador puede ser

- **Piramidal:** Es el indentador más frecuente en los ensayos de dureza. Puede ser de tres caras (Berkovich), con la misma relación de profundidad y área proyectada que el de cuatro caras (Vickers), siendo el primer tipo el que se usa con asiduidad en microindentación.
- **Cónico:** Acaba en punta al igual que el Berkovich y cumple la semejanza geométrica. Muchos trabajos de modelizaciones, para dar soporte a los ensayos de indentación, se basan en los contactos de indentación cónica.
- **Esférico:** Difiere del contacto puntiagudo en la forma en la que se desarrollan las tensiones durante el proceso de indentación, siendo las tensiones iniciales de contacto pequeñas y produciendo sólo deformaciones elásticas.



- **Cúbico:** Consiste en una pirámide de tres caras perpendiculares entre si, acabando en una geometría cúbica. Las esquinas ortogonales producen altas tensiones y deformaciones en las proximidades del contacto.

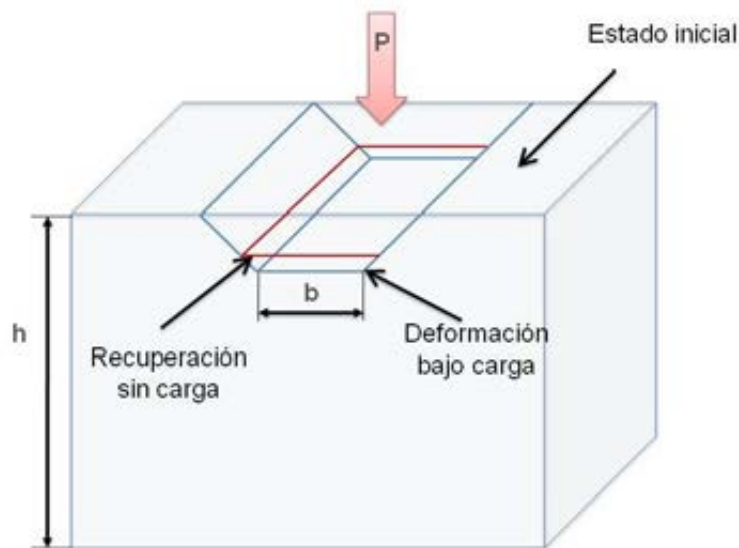


Figura 2.5: Representación de la sección de un proceso de indentación

Cabe destacar que, en las últimas dos décadas, se ha venido desarrollando una nueva técnica conocida como *indentación instrumentada* [20] o *nanoindentación*, que permite medir las propiedades mecánicas de los materiales a escala submicro o nanogeométrica.

En la Figura 2.5 se aprecia cómo se lleva a cabo del proceso de indentación. Al presionar el indentador sobre la superficie del material que se pretende deformar, se lleva a cabo tanto deformaciones elásticas como plásticas, produciéndose una huella en relación de la forma del indentador y de la profundidad que haya alcanzado éste. Al cesar el esfuerzo, parte del material recupera su forma, la que se debe a la deformación elástica, quedando una profundidad residual. Cuando se trabaja con metales, presentan un comportamiento mayormente plástico, por lo que la recuperación elástica suele ser menor que la huella plástica que queda al finalizar el proceso.

Actualmente ha resurgido el interés por procesos de deformación como la indentación, gracias al desarrollo de nuevas técnicas de fabricación innovadoras, entre los que cabe destacar del *Proceso de Forja Incremental* (PFI). Diversos autores han estudiado las diferentes aplicaciones de los PFI, como Grosman [21], con estudios dedicados a la formación de anillos de forja mediante un proceso de indentaciones consecutivas, aplicando esfuerzos a través de matrices esbeltas, llegando a desarrollar dos patentes de aplicación del proceso. También son destacables los trabajos de Bouffioux [22] y Camacho [23], que presentan diferentes estudios sobre el *Proceso de Forja Incremental Puntual* (PFIP), también conocido como *Proceso de Forja Incremental Localizada* (PFIL), en sus diferentes variantes. La principal ventaja de este tipo de procesos es que pueden ser controlados por completo mediante

máquinas gobernadas por Control Numérico, presentando esfuerzos reducidos para alcanzar la deformación necesaria.

Los PFI surgen como alternativa a los procesos tradicionales de deformación plástica y de mecanizado con el fin de hacer frente a los profundos cambios que concurren hoy día en la industria. Este tipo de procesos aparece como una posibilidad de cara a alcanzar muchos de los objetivos propuestos por la industria actual, aunque su aplicación aún continúa siendo muy restringida.

De entre las particularidades que caracterizan a este tipo de procesos, las principales y más atractivas serían: la gran versatilidad que presenta la maquinaria utilizada, puesto que permite su adaptación a una gran variedad de procesos; el bajo coste de producción, uno de los objetivos más buscados en la industria actual; la gran calidad de los acabados, lo que lo hace un proceso apropiado para aplicaciones de alta precisión como las que se requieren en las industrias automovilística o aeroespacial; los reducidos esfuerzos de deformación y la posibilidad de incluir para su deformación una amplia variedad de materiales, incluso aleaciones de Titanio o superaleaciones, que suelen ser más complicados de conformar mediante otros procesos de fabricación tales como el mecanizado [10].

Por lo tanto, el estudio y análisis de los PFI, dentro de los cuales se incluyen los procesos de indentación, resulta un tema recurrente de investigación, como demuestra la bibliografía consultada [24, 25]. Por consiguiente, se vuelve imperativo implementar este tipo de procesos en la industria actual, para alcanzar una producción competitiva.

Desde esta perspectiva, realizando un acercamiento singular de los PFI e identificando el proceso como una sucesión de indentaciones localizadas, el caso de estudio se puede llegar a simplificar hasta analizar únicamente un único proceso de indentación en cada fase.

De esta forma queda englobado el proceso de indentación que se pretende abordar en la presente Tesis Doctoral.

## 2.4 Rozamiento en los PCDP

Aunque el análisis del rozamiento se abarcará ampliamente a lo largo de la Tesis, es necesario aclarar la metodología y naturaleza del rozamiento que se produce en los PCDP y la influencia que tiene sobre ellos.

*<<...La fricción (o rozamiento) se define como la resistencia al movimiento relativo entre dos cuerpos que se tocan, sometidos a una carga normal (perpendicular)...>> [26]*

La fricción desempeña un papel importante en la clase de procesos estudiados ya que siempre existirán movimientos relativos y esfuerzos en el punzón.

La fricción o rozamiento es un proceso inevitable. Disipa energía y, en consecuencia, genera calor, que puede, a su vez, puede afectar negativamente a la



realización de la operación. Es innegable que, debido a la existencia del rozamiento, es necesario la aplicación de un esfuerzo adicional, lo que se produce en todos los procesos de conformado de metales. Conforme aumente el rozamiento, se deberá incrementar la carga requerida para deformar la pieza, llegando a presentarse aumentos de un 30% de la carga, en condiciones normales de trabajo sobre procesos de forjado en frío.

Por ello, en cualquier proceso de fabricación, se busca el menor coeficiente de rozamiento posible mediante la utilización de lubricantes. Aunque a veces la fricción pueda ser necesaria, como es el caso de la laminación para evitar que los cilindros patinen, un exceso de ésta puede provocar distorsión y pérdida completa sobre el control de las dimensiones, malos acabados superficiales, desgaste de herramienta y el agravamiento de la distorsión del flujo de material, así como grietas superficiales y otros defectos. Una buena lubricación proporciona un movimiento más uniforme que en ausencia de la misma.

En las operaciones que se encuentran dentro del campo de interés de la presente investigación, la fluencia puede verse considerablemente afectada por el valor del rozamiento, particularmente en la forja con matriz abierta. El abarrilamiento que se produce por la presencia de un rozamiento grande en la compresión, por ejemplo, limitará la reducción de sección permisible.

Uno de los efectos más graves que pueden encontrarse debido a la presencia de un rozamiento grande, es la transferencia o adherencia de metal a la herramienta. Esta transferencia ocurrirá con más facilidad dependiendo del material utilizado, pero limitará seriamente la reducción de sección en cada pasada. Este efecto puede realizarse de dos formas distintas:

- *Superficies rugosas:* Asociada a este tipo de superficies en las herramientas. Al verse agotada la película lubricante, el metal de la pieza entrará en las hendiduras de la herramienta. El movimiento tangencial a lo largo de la cara de la herramienta tenderá a cizallar el metal blando que sobresalga, dejando detrás fragmentos sueltos, lo que generará un acabado defectuoso.
- *Adhesiva:* Más grave que la anterior, a su vez puede verse originada por diversas causas, dentro de las que se incluyen pequeñas partículas de óxido o cascarilla, que quitan las películas superficiales protectoras y dejan el metal desnudo. Al ponerse en contacto dos de estas superficies bajo la presión de trabajo, tienden a soldarse haciendo que un fragmento de la pieza se desgarre por cizallamiento y quede adherido a la herramienta. Este fenómeno impide la operación de conformado y la herramienta deberá repararse.

Ya que se trabaja sobre la teoría del conformado de metales, es conveniente recordar que siempre se supone que la tensión tangencial,  $\tau$ , en la superficie de la pieza será proporcional a la tensión normal  $\sigma$  generada por una presión  $p$ , de igual valor y signo opuesto. Por tanto, el coeficiente de rozamiento se podrá definir como  $\mu = \tau / \sigma$ , que se relaciona de forma equivalente a la fuerza tangencial y normal en física

elemental, si bien en este caso la tensión tangencial será igual al límite de fluencia por cizalladura  $k$  del metal.

Es conocido que el valor mínimo con el que puede presentarse una deformación plástica es la tensión de fluencia uniaxial  $Y$ , por lo que el valor máximo del coeficiente de rozamiento se puede deducir de la relación  $k/Y$ , relacionadas así mismo mediante el criterio de fluencia. Fijando como tal el criterio de von Mises, se tendrá la Ec. 2.3, por lo que se obtiene el siguiente valor de rozamiento máximo:

$$\mu_{max} = \frac{k}{Y} = 0,577 \quad \text{Ec. 2.4}$$

Este tipo de rozamiento constante se conoce como rozamiento de Coulomb o rozamiento por deslizamiento. Aunque este rozamiento puede variar durante el proceso de conformado, diferentes estudios indican que dicha variación es un fenómeno despreciable en casos de lubricación adecuada.

En adelante, se supondrá que la tensión de cizalladura  $\tau$ , comprendida entre la pieza y la herramienta y donde existe una tensión normal  $\sigma$ , vendrá definida por la siguiente relación:

$$\tau = \mu\sigma \quad \text{Ec. 2.5}$$

Siempre que  $\tau < k$ . De lo contrario, existiría rozamiento por adherencia y la relación sería la siguiente:

$$\tau = k \quad \text{Ec. 2.6}$$

Aun hoy día es difícil establecer un método para medir el valor del coeficiente de rozamiento. No obstante, su efecto no suele sobrepasar el 10 o 20% de la fuerza aplicada [5], por lo que los valores aproximados suelen ofrecer buenos resultados.

Otro de los factores que se ven involucrados en la lubricación es la temperatura de la superficie. La temperatura de la interfaz aumentará hasta un punto que dependerá del rozamiento y la conductividad térmica del material, debido a que el trabajo necesario para vencer el rozamiento se genera en una capa delgada y muy rápidamente.

En los procesos presentados, la superficie de contacto es más uniforme debido a la gran deformación de la pieza, por lo que a igual velocidad cabe esperar temperaturas más bajas en relación a las presentadas por Browden y Tabor en los estudios realizados sobre fricción [27]. Además, muchas de estas operaciones de conformado plástico suelen hacerse a velocidades bajas, de manera que el problema de la temperatura es leve. Sí ha de tenerse en cuenta el aumento adicional de la temperatura debido al calor generado por la misma deformación dentro del metal, calor

que puede o no tener tiempo de difundirse a la superficie durante el paso de la herramienta.

En la presente Tesis se tendrá en cuenta la influencia del rozamiento, así como del resto de los diversos factores influyentes. El método analítico utilizado y desarrollado permite la introducción de estos factores, para una mejor aproximación al comportamiento real, así como una consecución de valores optimizados según las cualidades del proceso estudiado.

## 2.5 Método de Análisis

A continuación, con la intención de situar el estado del arte y centrar el método utilizado en el presente estudio, se exponen los métodos analíticos más comunes que se emplean para analizar los procesos de deformación plástica metálica [28, 29] hasta desembocar en el Teorema del Límite Superior, que es el caso que atañe esta Tesis Doctoral.

Un método analítico es aquel método de investigación consistente en la desmembración de un todo, descomponiéndolo en sus partes o elementos para observar las causas, la naturaleza y los efectos. El análisis es la observación y examen de un hecho en particular. Es necesario conocer la naturaleza del fenómeno u objeto que se estudia para comprender su esencia. Los métodos analíticos se establecen a partir de combinaciones operativas entre los diferentes recursos teóricos disponibles y una serie de hipótesis simplificadoras.

El diseño, control y optimización de los PCDP requieren de conocimientos analíticos profundos con respecto al flujo del metal, esfuerzos, temperatura y transferencia de calor, así como de información relacionada con la lubricación, técnicas de calentamiento o enfriamiento, manejo de materiales y diseño, entre otras. La complejidad de estos procesos hace muy complicado su tratamiento tanto teórico como matemático. Por ello, generalmente se suelen adoptar hipótesis simplificadoras de la problemática, a fin de plantear un caso más sencillo. Entre éstas hipótesis se suele emplear la aceptación del comportamiento rígido-plástico perfecto del material, la deformación homogénea, la deformación plana o la ausencia de rozamiento, entre otras.

El propósito del análisis de los PCDP es la consecución de los siguientes objetivos:

- Establecer las relaciones cinemáticas responsables del paso entre la pieza inicial y la final. Es decir, predecir el flujo del metal durante la operación de conformado.
- Establecer los límites necesarios para determinar si es posible llevar a cabo la operación de conformado sin causar defectos en la pieza.
- Predecir los esfuerzos, fuerzas y energías necesarias para llevar a cabo la operación de conformado y para el diseño y selección del equipo apropiado.

Las soluciones podrán ser obtenidas sólo si se cumplen las siguientes reglas de forma estricta:

- Las condiciones de contorno deben ser satisfechas, incluyendo el rozamiento herramienta-pieza.
- El volumen del material se mantendrá constante: Continuidad del flujo.
- Las relaciones entre los esfuerzos internos y el flujo de material en el material real deben ser conocidas. Dado que esto no siempre es posible, se suele trabajar aplicando el comportamiento definido por el criterio de von Mises, manteniendo la relación entre el tensor desviador y las deformaciones.
- Las ecuaciones diferenciales de equilibrio para el tensor de esfuerzos han de satisfacerse en todo punto del cuerpo deformado.

Las relaciones que gobiernan la solución de la mecánica de deformación plástica se pueden resumir en las ecuaciones de equilibrio, el criterio de fluencia, las ecuaciones constitutivas del material y las condiciones de compatibilidad. Algunos de los métodos de aproximación más empleados en el estudio de la mecánica del conformado plástico son los siguientes [30]:

- Método de la deformación homogénea
- Método del análisis local de tensiones
- Método del campo de líneas de deslizamiento
- Métodos del límite superior e inferior

Todos estos métodos son capaces de obtener soluciones aproximadas. Cada uno, como se mostrará en los apartados anteriores, está sujeto a un tipo de problemática o condición específica.

### 2.5.1 Deformación Homogénea

En la Figura 2.6 se aprecia cómo un bloque, que se considera prismático, se ve comprimido de forma que cada uno de los elemento que lo constituyen se deforma siempre en el mismo instante y en el mismo grado. Conforme las platabandas se aproximan entre sí, las líneas que eran rectas antes de la deformación seguirán siéndolo después y las rectas paralelas siguen siendo paralelas entre sí. La forma prismática del bloque permanece sin que se produzcan deformaciones laterales o abombamientos. El área de contacto de la pieza con las platabandas se ve aumentada mediante el deslizamiento lateral del material. Todos los elementos del material se ven sometidos a la misma compresión.

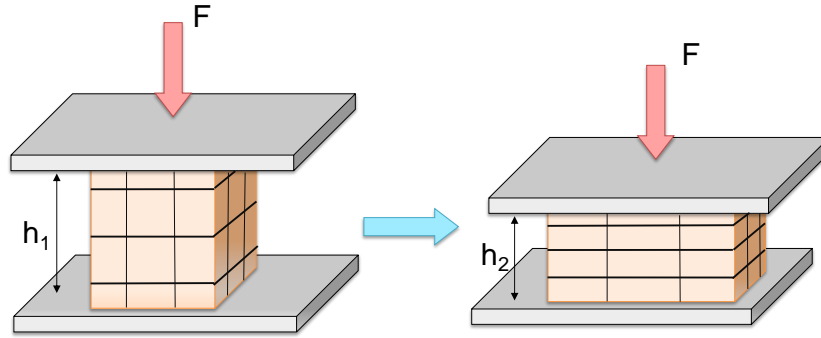


Figura 2.6: Deformación Homogénea

Por tanto, si un bloque prismático está caracterizado por una tensión de fluencia  $Y$ , con una altura inicial  $h_1$  y un área de sección transversal inicial  $A_1$ , se somete a compresión, la fuerza necesaria para comenzar la deformación tendrá un valor igual al producto de  $Y \cdot A_1$ . Cuando la altura del bloque se vea reducida a  $h'$ , el área de la sección transversal será  $(A_1 \cdot h_1)/h'$  y la fuerza de presión será equivalente a  $F = (A_1 \cdot h_1 \cdot Y)/h'$ . Por tanto, el esfuerzo necesario para realizar la compresión en cada instante se verá incrementado.

Se considerará que, cuando el bloque alcanza una altura  $h'$ , se produce una deformación equivalente a  $-dh'$ . El incremento de deformación interna uniaxial, al igual que en el caso tensional, se verá definido por la Ec. 2.7

$$d\epsilon_c = \frac{-dh'}{h'} \quad \text{Ec. 2.7}$$

La deformación compresiva total necesaria para reducir el bloque de  $h_1$  a  $h_2$  es:

$$\epsilon_c = \int_{h_1}^{h_2} \frac{-dh'}{h'} = \ln h_1/h_2 \quad \text{Ec. 2.8}$$

Cuando la altura del bloque es  $h'$ , para comprimir dicho bloque una cantidad  $-dh'$ , debe realizarse cierta cantidad de trabajo  $dW$ :

$$dW = F \cdot (-dh') = \frac{A_1 \cdot h_1 \cdot Y}{h'} \cdot (-dh') \quad \text{Ec. 2.9}$$

Por tanto, el trabajo total realizado en la compresión del bloque de  $h_1$  a  $h_2$  es:

$$W = A_1 \cdot h_1 \cdot Y \int_{h_1}^{h_2} \frac{-dh'}{h'} = A_1 \cdot h_1 \cdot Y \cdot \ln h_1/h_2 \quad \text{Ec. 2.10}$$

El trabajo realizado por unidad de volumen de material será:

$$w = \frac{W}{V} = \frac{W}{A_1 \cdot h_1} = Y \cdot \ln h_1/h_2 = Y \cdot \epsilon_c \quad \text{Ec. 2.11}$$

Siendo  $\epsilon_c$  la deformación natural a la compresión impuesta. De la misma forma, si la sección de una barra de material que no endurece por deformación se ve reducida mediante tracción, tal como puede observarse en los ensayos unidireccionales de tracción, desde una altura inicial  $h_2$  a una final  $h_1$ , el trabajo por unidad de volumen también será el mostrado en la Ec. 2.12.

$$Y \cdot \epsilon_c = Y \cdot \ln h_1/h_2 \quad \text{Ec. 2.12}$$

Debido a que se ha supuesto que no existe energía debida a la fricción entre las placas paralelas que comprimen el material, y debido a que cada elemento es deformado de forma idéntica, se llega a una modificación en la forma del bloque mediante una eficiencia máxima. No obstante, la deformación homogénea no llega a darse nunca en PCDP reales. Se puede asimilar fácilmente al ensayo de tracción. El trabajo real con metales incluye deformaciones redundantes, pero se pueden lograr resultados cercanos suponiendo que la pieza deformará homogéneamente y aplicando dicho método.

Sin embargo, de forma general utilizando este método, se aprecia que el cálculo de las tensiones infravalora las cargas de trabajo. Esto se debe a que el trabajo final o total está compuesto por tres componentes:

- $W_H$  = Deformación homogénea
- $W_K$  = Resistencia por rozamiento externo
- $W_R$  = Distorsión interna o trabajo adicional

Esta distorsión redundante supone un trabajo adicional, como se ha mencionado anteriormente, y también contribuye al endurecimiento por deformación del material. El trabajo total  $W_T$  será el resultado de la suma de estos tres términos. Por tanto, la tensión de fluencia real de un metal trabajado será más alta que la que se podría calcular a partir de exclusivamente la consideración de la ampliación/reducción del área medida y la curva tensión-deformación.

Por otra parte, este método sólo proporciona valores globales de deformación y cargas aplicadas, sin que de él se puedan determinar los valores de variables puntuales tales como la distribución de las tensiones, esfuerzos y deformaciones, en cuyo caso será preciso utilizar un método que sí permita obtenerlas. Surgen así otros métodos como el del análisis local de tensiones.

### 2.5.2 *Análisis Local de Tensiones*

Este método consiste en realizar un análisis de los esfuerzos que sufre el cuerpo de deformación, centrándose el estudio únicamente en un elemento diferencial del

mismo y extrapolándolo al resto del material al aplicar el equilibrio global de fuerzas y las condiciones de contorno. Es un método muy útil a la hora de estimar la importancia del rozamiento en los esfuerzos requeridos en los procesos de deformación. Se deben realizar las siguientes hipótesis, entre otras:

- Los ejes principales se encuentran en la misma dirección de las cargas aplicadas.
- Los efectos del rozamiento no alteran las direcciones de los ejes principales ni causan distorsiones internas. Por tanto, la deformación es homogénea y las secciones planas continuarán siendo planas (no tiene en cuenta el trabajo adicional debido a la distorsión interna).

Con el fin de describir el método, se analizará un caso de compresión mediante placas planas paralelas, como se muestra en la Figura 2.7.

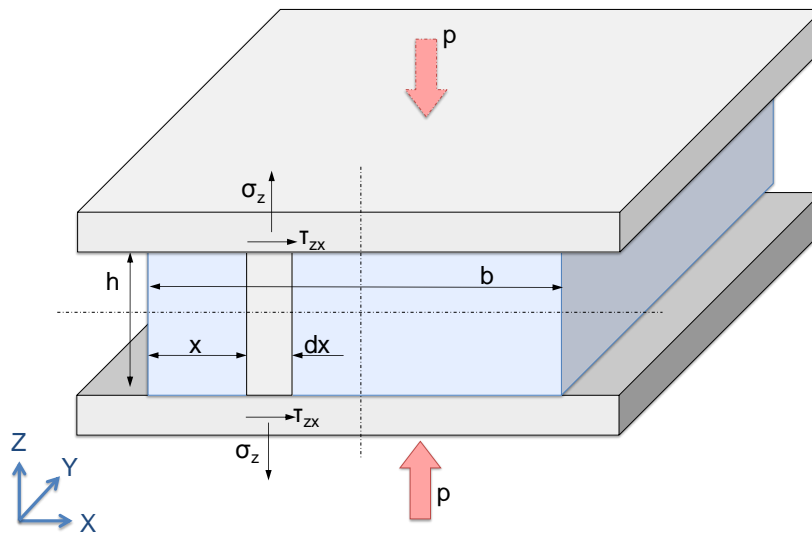


Figura 2.7: Análisis Local de Tensiones

Se supondrá una tensión horizontal  $\sigma_x$  uniforme en toda la sección, siendo a su vez una tensión principal. Debido a esto, el equilibrio horizontal de las fuerzas que actúan en el elemento diferencial situado a la izquierda del eje vertical se representa en la siguiente ecuación:

$$(\sigma_x + d\sigma_x)h - \sigma_x \cdot h - 2\tau_{zx}dx = 0 \quad \text{Ec. 2.13}$$

A la derecha de la línea central

$$(\sigma_x + d\sigma_x)h - \sigma_x \cdot h + 2\tau_{zx}dx = 0 \quad \text{Ec. 2.14}$$

Y simplificando y combinando la Ec. 2.13 y la Ec. 2.14

$$hd\sigma_x \pm 2\tau_{zx}dx = 0 \quad \text{Ec. 2.15}$$

Siendo  $\tau_{zx} = \mu \cdot p$ , se puede obtener una relación entre  $p$  y  $\sigma_x$  donde, despejando e integrando, se obtiene la siguiente ecuación:

$$\ln p = \pm \frac{2\mu}{h}x + C \quad \text{Ec. 2.16}$$

Para el cálculo de la constante de integración, basta calcularla para la condición de tensión horizontal nula en ambos extremos,  $x = \pm b/2$ . Así, para  $b/2$ :

$$c^- = 2ke^{+\frac{\mu b}{h}} \quad \text{Ec. 2.17}$$

Teniendo el mismo valor en el caso de la derecha de la línea de centro  $x = 0$ . Por este motivo, el valor máximo de centro será:

$$\left(\frac{p}{2k}\right)_{max} = e^{\frac{\mu b}{h}} \quad \text{Ec. 2.18}$$

La principal consideración restrictiva que presenta este método es que los resultados obtenidos son válidos únicamente para las hipótesis de partida mencionadas, indudablemente, siendo una de ellas el rozamiento débil entre pieza y matriz, acotando de forma considerable la aplicación del método.

### 2.5.3 Campo de Líneas de Deslizamiento

Este método se encuentra relacionado estrechamente con la experiencia. Se basa en el análisis de deformación de un campo que es consistente geométricamente y admisible estáticamente. Las líneas de deslizamiento representan en cada punto las direcciones de máxima tensión cortante en el material. Tienen una orientación de  $45^\circ$  con respecto a los ejes de los principales esfuerzos tensionales. El diagrama del campo de líneas de deslizamiento se puede considerar como un mapa que muestra las direcciones de los esfuerzos cortantes máximos en un punto cualquiera del cuerpo sometido a deformación [31].

Se asumirá que:

- El material es isotrópico y homogéneo
- El material es rígido-plástico perfecto, por lo que no existe el endurecimiento por deformación
- Los efectos de la temperatura y las velocidades de deformación son ignorados
- Se trata de un caso de deformación plana



- La tensión a cortadura en los planos de interferencia es constante, generalmente sin rozamiento.

Con las siguientes condiciones de contorno:

- La fuerza o tensión normal a una superficie libre será una tensión principal, por lo que las familias de líneas consideradas, en este caso representadas como  $\alpha$ - y  $\beta$ -, cruzarán sus superficies en un ángulo de  $45^\circ$  (Figura 2.8).
- Las líneas  $\alpha$ - y  $\beta$ - deben cruzar superficies sin rozamiento a  $\Phi = 45^\circ$ .
- Las líneas  $\alpha$ - y  $\beta$ - deben cruzar superficies con rozamiento leve a  $\Phi = 0^\circ$  o  $\Phi = 90^\circ$ .

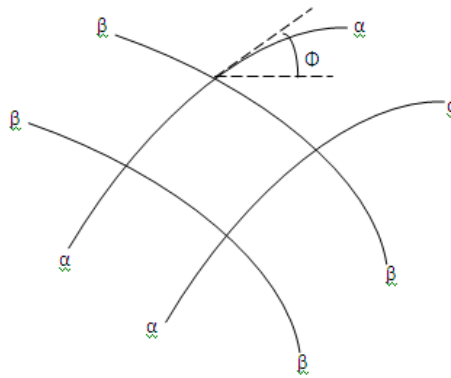


Figura 2.8: Pares de líneas de deslizamiento

Como el esfuerzo cortante va acompañado de un esfuerzo cortante complementario de igual magnitud y sentido opuesto, siempre existirán dos direcciones de esfuerzos cortantes máximos mutuamente perpendiculares en cada punto (Figura 2.8). Por tanto, el mapa de líneas que represente estas direcciones constará de dos series de líneas ortogonales entre sí.

En cuanto a la deformación plana, se considera un estado en el que la fluencia es siempre paralela a un plano dado, por ejemplo el plano del papel  $(x,y)$ , e independiente de  $z$ . Por tanto, se trabajará con un problema de dos dimensiones en el que las componentes de velocidad serán  $u_x$  y  $u_y$ , donde los subíndices indican el eje al que pertenece dicha componentes de la velocidad. Como  $\tau_{xz}$  y  $\tau_{yz}$  son cero por simetría, entonces  $\sigma_z$  será la tensión principal.

Se pueden mencionar cuatro razones por las que resulta interesante el trabajo con un modelo de deformación plana:

- Cada incremento se produce por cortadura pura, por ejemplo con  $d\epsilon_2 = 0$ ,  $d\epsilon_1 = -d\epsilon_3$ , y el apropiado diagrama de Mohr mostrado en la Figura 2.9.
- El sistema asociado de tensiones también representa esfuerzos cortantes puros, pero con la tensión hidrostática superpuesta. Si  $d\epsilon_2=0$ , la tensión intermedia,  $\sigma_2 = (\sigma_1 + \sigma_3)/2$ , es equivalente a la tensión hidrostática,  $\sigma_h$ , que

puede ser incluida a una tensión cortante,  $\tau = (\sigma_1 + \sigma_3)/2 = \pm\sigma$ , para obtener el estado tensional real.

- La fluencia ocurre cuando se alcanza la tensión máxima a cortadura, que viene a ser expresado como  $\sigma_1 - \sigma_3 = 2\tau_y$
- Las ecuaciones de equilibrio tensional se reducen para diferentes variaciones de  $\sigma_h$  a lo largo de la zona plástica. Y dado que la parte a cortadura del sistema de tensiones no puede cambiar, debido a la inexistencia de endurecimiento, la magnitud de todos los componentes se conoce una vez determinada  $\sigma_h$

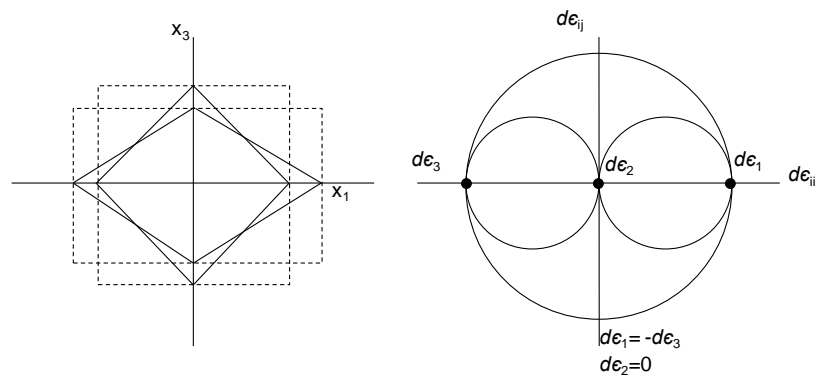


Figura 2.9: Tensión cortante pura en Deformación Plana [32]

Para llevar a cabo su aplicación al proceso de indentación que se estudia en la presente Tesis, se propone un campo de líneas de deslizamiento como el mostrado en la Figura 2.10, en que aparece un punzón indentador de anchura O'O que ejerce una presión  $p$  sobre la superficie de una pieza C'C, en el supuesto de deformación plana.

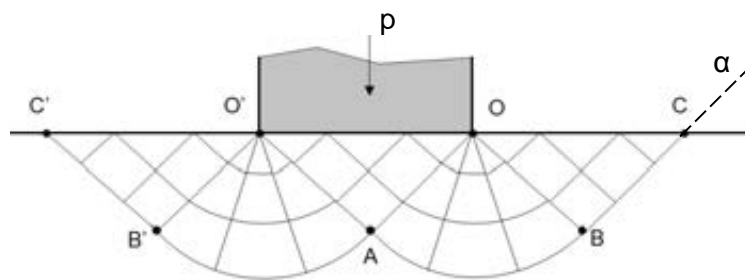


Figura 2.10: Posible Campo de líneas de deslizamiento en caso de Indentación

El campo de líneas puede elegirse libremente. El caso más sencillo sería el construido con líneas rectas formando un sistema cartesiano. En regiones rectas no suele existir ninguna problemática, pero cuando las líneas son curvas se obtienen mejores resultados con líneas de deslizamiento que tienen una separación angular pequeña, siendo los intervalos de  $5^\circ$  los que normalmente ofrecen más exactitud [33].

El campo estará formado por dos abanicos de líneas centrados en  $O$  y  $O'$  y otras zonas de presión constante. Las líneas  $\alpha$  y  $\beta$  pueden encontrarse asumiendo que, paralelamente a  $OC$ , la tensión es compresiva y la tensión normal es cero. O bien, de forma alternativa, que bajo el punzón que produce la indentación la mayor tensión compresiva es paralela a  $p$ .

Por tanto, a lo largo de  $OC$ :

$$\sigma_1 = 0; \sigma_2 = -k; \sigma_x = \sigma_3 = -2k \quad \text{Ec. 2.19}$$

Rotando en la dirección de las manecillas del reloj a lo largo de  $CBAO'$  en la línea  $\alpha$  (Figura 2.10), aplicando las ecuaciones correspondientes a la deformación plana y al método de campo de líneas de deslizamiento vistas en los párrafos anteriores, se llega a la siguiente solución:

$$\Delta\Phi = -\pi/2 \quad \text{Ec. 2.20}$$

$$\sigma_{200'} = \sigma_{20C} + 2k\Delta\Phi_\alpha = -k + 2k(-\pi/2) \quad \text{Ec. 2.21}$$

$$\frac{p}{2k} = \frac{p_0}{2k} = \frac{-\sigma_{200'}}{2k} = 1 + \frac{\pi}{2} = 2,57 \quad \text{Ec. 2.22}$$

Aplicando el criterio de von Mises,  $2k=1,155Y$ , por tanto la solución que se estaba buscando será  $p=2,97Y$ , siendo este ejemplo muy similar a un test de dureza bidimensional.

Como se ha comentado en párrafos anteriores, este método analítico está estrechamente relacionado con la experiencia dado que los mismos campos de líneas de deslizamientos se construyen mediante un proceso de tanteo basado en resultados y experiencias anteriores, conociendo inicialmente las condiciones de equilibrio del contorno y satisfaciendo las condiciones de continuidad y velocidad del propio metal sometido a deformación.

Comparando los resultados de este método con los resultados del método de deformación homogénea, resultan en ocasiones hasta el doble del valor de los segundos, dado que el primero incluye adicionalmente tanto al trabajo de rozamiento extremo como al de distorsión interna. Por ello, los resultados obtenidos mediante campos de líneas de deslizamiento suelen concordar bien con los experimentos realizados para comprobarlos.

Presenta la desventaja de la gran complejidad que pueden presentar los campos de líneas de deslizamientos cuando se abarcan problemas más comunes, además de estar restringida su aplicación a la deformación plana. No obstante, es un método de análisis bastante extendido en el estudio de la indentación, que es el que abarca la presente Tesis, por lo que resultará un buen método analítico con el que realizar las

convenientes contrastaciones de los resultados obtenidos mediante el método objeto de estudio, el de límite superior.

#### 2.5.4 Teoremas del Límite

El cálculo de la carga exacta para producir una deformación plástica no siempre resulta fácil de realizar y, en ocasiones, no es posible su obtención sin la realización de ensayos físicos. Las soluciones deben ser tanto estática como cinemáticamente admisibles, lo que significa que la geometría debe ser consistente en sí misma, que debe existir constancia de volumen, así como satisfacer los requerimientos del equilibrio de tensiones en todos los puntos del cuerpo que se pretende deformar plásticamente.

No obstante, para muchos trabajos de deformación plástica en metales no es necesario conocer este valor exacto de esfuerzo (generalmente suele ser una fuerza o un momento) para producir la forma deseada y, por tanto, se puede realizar una aproximación de la carga necesaria. Siguiendo los métodos y aplicaciones de Avitzur [34], se han desarrollado métodos que determinan los valores de la carga tanto por defecto como por exceso.

Frecuentemente es más sencilla la utilización de Teoremas del Límite, inicialmente empleados por Johnson [35], que permiten realizar análisis que resultan del cálculo de esfuerzos que son conocidos y que sientan sus bases en la satisfacción del equilibrio de tensiones. Permiten determinar los valores de la carga que estará entre estos límites superior e inferior, pero para el caso principal del estudio aquí presentado, es más conveniente la aplicación del teorema de forma que ofrezca el valor por exceso y así garantizar que la deformación se produce por completo. Generalmente, los cálculos que permiten obtener el valor inferior se utilizan para cálculos de estructuras y en aplicaciones civiles, mientras que los valores por exceso son de utilidad para la ingeniería de fabricación, ya que garantizan la realización del proceso.

El Teorema del Límite es de mucha utilidad en aplicaciones de deformación plana, ya que permite la obtención del límite superior mediante tratamientos básicamente gráficos. Ciertamente es que los resultados obtenidos son siempre aproximaciones, pero manteniendo las restricciones necesarias, suelen ser valores cercanos a la realidad y permiten una primera aproximación al problema sin necesidad de mucho esfuerzo resolutivo.

A continuación se detalla cada una de las dos tipologías del Teoremas Límite.

##### 2.5.4.1 Límite Inferior

Este método permite predecir unos valores de esfuerzos que serán menores a los necesarios para producir la deformación plástica, por lo que resulta bastante interesante para realizar diseños estructurales. Van asociados al principio del trabajo

máximo, mediante el cual la distorsión causada por la aplicación de la tensión es tal que provoca una disipación máxima de energía.

Estos análisis deben satisfacer el criterio de fluencia plástica y los equilibrios de fuerza, pero no toman consideración acerca del flujo del material en el proceso de deformación que se esté estudiando. Por ello, no es necesario satisfacer las relaciones esfuerzo-deformación ni las condiciones de contorno. Como se aprecia, es mucho menos restrictivo que los anteriores métodos expuestos.

Parte de la base de que el esfuerzo real será igual o mayor que cualquier campo tensional estáticamente admisible que se pueda implementar. Por tanto, siempre se trabajará desde la seguridad, evitando la deformación plástica.

Prager y Hodge [36] establecieron que entre “todos los campos de esfuerzos estáticamente admisibles, el real es aquél que maximiza la expresión”:

$$\dot{W} = \int_{SV} T_i V_i dS \quad \text{Ec. 2.23}$$

Siendo  $W$  la energía ejercida por la herramienta, que en el presente caso de indentación es el punzón sobre las superficies de contacto punzón-pieza, en las que se han definido las velocidades;  $T_i$  son los esfuerzos de tracción sobre la superficie de contacto, y  $V_i$  es la velocidad del punzón.

Uno de los inconvenientes de este proceso es que puede llegar a ofrecer ecuaciones muy complejas por su imposibilidad de realizar estudios que tomen los términos de forma independiente. No obstante, ya que las soluciones son por defecto, este método no resulta de aplicación sobre el caso de la presente tesis.

#### 2.5.4.2 Límite Superior

Mediante este método, se iguala la energía disipada internamente por el proceso de deformación en cuestión, con la energía consumida por los esfuerzos externos, suponiendo un determinado flujo de material en el proceso de deformación plástica.

Al contrario que en el Límite Inferior, el Límite Superior no se ocupa del equilibrio de las tensiones aunque sí es necesario un conocimiento de las condiciones que deben cumplirse mediante los incrementos de deformación en un cuerpo totalmente plástico. A su vez, el material será incompresible.

Al igual que el anterior método, se basa en el principio de trabajo máximo, pero abordándolo desde la deformación; un elemento se deformará ofreciendo una resistencia máxima. Por tanto, solucionando el sistema, se estará trabajando con resultados que serán iguales o mayores a los esfuerzos necesarios para ocasionar la deformación. Es por ello que es un método muy valioso en problemas de conformado de metales, porque ofrece soluciones que serán suficientes para realizar la deformación.

El cálculo de esfuerzos calculados con este procedimiento es superior a la fuerza necesaria para producir deformación plástica. El método para calcular fuerzas supondrá, entre otras, las siguientes consideraciones:

- Se supone un flujo de material que sea consistente con el cambio de forma deseado, lo que se conoce como campo cinemáticamente admisible.
- La potencia interna disipada por esfuerzos cortantes se calcula con las velocidades entre las superficies de discontinuidad y la máxima resistencia a la tensión cortante del material, en su caso  $k$ .
- Las fuerzas que se debe aplicar para conseguir la deformación, se calculan igualando la potencia externa aplicada con la potencia interna disipada mediante esfuerzos cortantes.
- Se supone material isotrópico y homogéneo, sin considerar endurecimiento por deformación ni por velocidad de deformación.

Siendo  $du_i$  el actual incremento en el campo de desplazamientos o velocidades, y  $du_i^*$  cualquier otro diferente o asumido, tal que  $\partial u_i^* = \partial u_i$  en  $S_u$ , siendo  $S_u$  la superficie donde se produce dicho desplazamiento. Las condiciones asumidas se mostrarán marcadas con un asterisco. Ambos campos cumplen la condición de incompresibilidad, por tanto  $\partial u_i^* / \partial x_i = 0$  y  $\partial u_i / \partial x_i = 0$ , porque en caso contrario, entrarían a trabajar las componentes de torsión. Esta condición facilita la decisión de asumir un campo válido y hace posible encontrar los incrementos en los desplazamientos en cada punto.

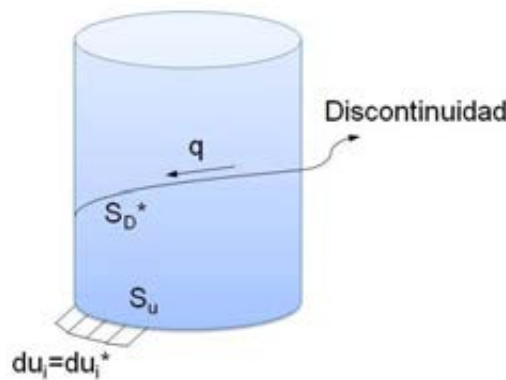


Figura 2.11: Definición de términos

Un campo de velocidades (o desplazamiento) cinemáticamente admisible tendrá discontinuidades en la componente tangencial a lo largo de cierta superficie  $S_D$ , pero la componente normal será idéntica en el mismo lado de dicha superficie, de modo que no existirá ningún cambio plástico en el volumen. Se denotará como  $\partial \epsilon_{ij}^*$  el incremento de tensiones asumido como una derivada de  $\partial u_i^*$  en su forma habitual.

Frecuentemente se puede hacer uso de la solución del campo de líneas de deslizamiento como guía para elegir el tipo de división conveniente [37]. Si se aplica el principio de trabajo virtual al campo de velocidades cinemáticamente admisible y al actual campo de tensiones,  $\sigma_{ij}$ , se tiene:

$$\int_S T_i du_i dS = \int_V \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^* dV + \sum \int_{S_D} q |dv^*| dS_D^* \quad \text{Ec. 2.24}$$

Donde  $S$  y  $V$  son el total de la superficie y el volumen del cuerpo considerado,  $\partial v^*$  se refiere al incremento que se produce en la velocidad o desplazamiento tangencial de la discontinuidad en la superficie  $S_D^*$  para el campo de velocidades cinemáticamente admisible y  $q$  se refiere a la componente de la tensión cortante  $\sigma_{ij}$  en la dirección en la que se produce el desplazamiento. Ahora bien, si  $\sigma_{ij}$  es un campo de tensiones, no necesariamente estáticamente admisible, derivable mediante el concepto del potencial plástico del campo de tensiones  $\partial \epsilon_{ij}^*$ , se verifica que:

$$\int_V (\sigma_{ij}^* - \sigma_{ij}) d\epsilon_{ij}^* dV \geq 0 \quad \text{Ec. 2.25}$$

Aplicando esta ecuación a la Ec. 2.24, se obtiene la siguiente relación:

$$\int_S T_i du_i dS \leq \int_V \sigma_{ij}^* d\epsilon_{ij}^* dV + \sum \int_{S_D} k |dv^*| dS_D^* \quad \text{Ec. 2.26}$$

Dado que  $k > q$ . Entonces:

$$\int_S T_i du_i^* dS = \int_{S_u} T_i du_i dS_u + \int_{S_T} T_i du_i^* dS_T \quad \text{Ec. 2.27}$$

Y en consecuencia:

$$\int_{S_u} T_i du_i dS_u \leq \int_V \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^* dV + \sum \int_{S_D} k |dv^*| dS_D^* - \int_{S_T} T_i du_i^* dS_T \quad \text{Ec. 2.28}$$

Siendo  $S_T$  la superficie donde se encuentra aplicado el esfuerzo que produce la deformación analizada.

En la parte derecha de la Ec. 2.28 resulta el límite superior para el incremento de trabajo de las fuerzas desconocidas que actúan en la superficie  $S_u$ . Sabiendo además que en vez de

$$\int_V \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^* dV \quad \text{Ec. 2.29}$$

Se puede escribir

$$\int_V k d\gamma^* dV \quad \text{Ec. 2.30}$$

Donde  $k$  es el límite de fluencia a cortadura en el plano de tensión y  $\partial\gamma^*$  es la tensión máxima de cortadura ingenieril. Como se tratarán casos de deformación a compresión mediante bloques rígidos de material separados mediante líneas de discontinuidad de velocidades tangenciales, ese término será igual a cero ( $\partial\gamma^* = 0$ ). Además, en cada instante que se examine, el término

$$\int_{ST} T_i du_i^* dS_T = 0 \quad \text{Ec. 2.31}$$

Por tanto, se obtiene la expresión básica para el Límite Superior:

$$\int_{S_u} T_i du_i dS_u \leq \sum \int_{S_D} k |dv^*| dS_D^* \quad \text{Ec. 2.32}$$

#### 2.5.4.3 Límite superior en Deformación Plana

En el apartado 2.7.4.3, las condiciones asumidas, o no reales, se muestran con un asterisco con la intención de diferenciarlas de las condiciones reales. Al tratar con casos de deformación plana, esta diferencia existente entre condiciones reales y asumidas disminuye.

Se considerará un paralelepípedo de material rígido, con una altura igual a la unidad, definido por los extremos  $ABCD$ , como se aprecia en la Figura 2.12. Este paralelepípedo se considerará con un espesor, normal al plano del papel, igual a la unidad y se moverá hacia la izquierda, hacia el plano  $XX$ , con una velocidad unitaria.

Ya que se trata de una deformación en condiciones de deformación plana, dicha deformación se producirá de forma homogénea y solamente en los planos paralelos al papel. Es decir, se obviará la deformación ocurrida en la profundidad del objeto de estudio, sólo se tendrá deformación en dos direcciones posibles.

Todo el material a la derecha del plano  $XX$  es rígido pero, un tiempo después, cuando el paralelepípedo a traspasado dicho plano,  $ABCD$  se distorsiona adoptando la forma de un nuevo paralelepípedo formado por  $A'B'C'D'$ , moviéndose en una nueva dirección con velocidad  $v_2$ , formando un ángulo  $\alpha$  con su dirección original. Se asumirá que  $A'D'$  es paralelo a  $XX$ .



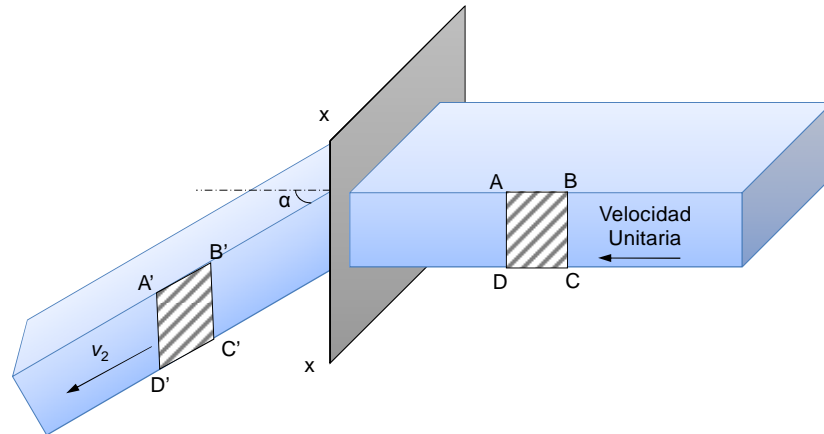


Figura 2.12: Modelo de deformación

La información referente a las velocidades se extrae del hodógrafo de la Figura 2.13. La velocidad unitaria inicial se descompondrá en las componentes  $v_p$  y  $v_a$ , velocidades perpendicular y paralela a  $XX$ , respectivamente. Para cada partícula de material situada a la izquierda del plano  $XX$ , las componentes de  $v_2$  son  $v_p$  y  $v_b$ . Donde  $v_p$  es necesariamente la misma tanto para la velocidad unitaria como para la  $v_2$  a fin de cumplir la condición de incompresibilidad o volumen constante del material.

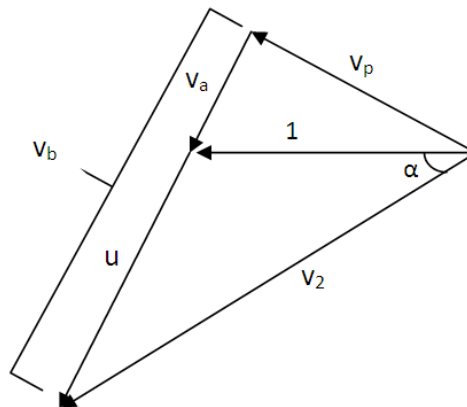


Figura 2.13: Hodógrafo correspondiente a la Figura 2.12 [8]

La diferencia entre  $v_b$  y  $v_a$  representa un salto o una discontinuidad en la velocidad tangente a  $XX$ . Este salto se manifiesta en la Figura 2.12 mediante el cambio de forma del paralelepípedo que se está analizando, que pasa de  $ABCD$  a  $A'B'C'D'$ . El salto, en realidad, no es instantáneo ni tan marcado como se muestra a lo largo del plano  $XX$ . No obstante, el cambio de velocidad sí ocurre a lo largo de bandas estrechas que, cuando se estudian aplicando el Teorema del Límite Superior, pasan a tratarse como líneas.

Pasando a considerar el trabajo aplicado en cambiar el bloque de forma, ya que  $AD$  es paralelo a  $XX$ , esa misma línea y todas sus paralelas se mantendrán su forma después de pasar por el plano  $XX$ . Por tanto, ambos bloques compartirán una base

común, como se aprecia en la Figura 2.14. Si  $\tau$  es la tensión cortante en los lados opuestos del bloque, el trabajo realizado es igual a  $(\tau \cdot BC) \cdot CC'$  o, expresado en términos de disipación de energía interna,  $(\tau \cdot BC) \cdot CC'/t$ , donde  $t$  corresponde al tiempo que tarde  $DC$  en cruzar el plano  $XX$ . Como el bloque se mueve a velocidad unitaria, la expresión anterior podrá escribirse como  $(\tau \cdot BC) \cdot CC'/DC$ .

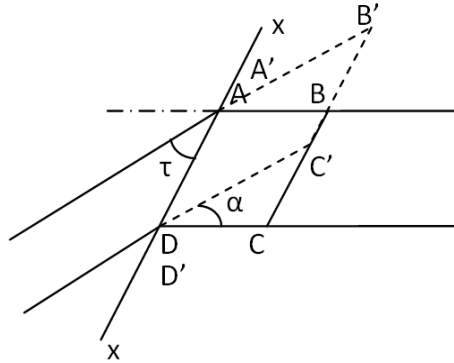


Figura 2.14: Disipación de energía interna [8]

Comparando el triángulo  $C'CD$  y el hodógrafo, se puede observar que son similares, por lo que  $CC'/DC=u$ . El ratio de disipación de energía podrá expresarse ahora como:

$$\frac{dW}{dt} = \tau \cdot BC \cdot \frac{CC'}{t} = \tau \cdot BC \cdot \frac{CC'}{DC} = \tau \cdot BC \cdot u = \tau \cdot AD \cdot u \quad \text{Ec. 2.33}$$

Por otra parte, cuando  $\tau$  alcance su mayor valor,  $k$ , el ratio de disipación de energía equivaldrá a  $k \cdot AD \cdot u$ , ya que, en condiciones de deformación plana, cuando  $\tau = k$ , el material desarrolla su máxima resistencia a la deformación.

Ahora bien, si la línea sobre la que la discontinuidad de la velocidad ocurre es curva, la Ec. 2.33 se expresará de la siguiente forma:

$$\frac{dW}{dt} = \int k \cdot u \, ds \quad \text{Ec. 2.34}$$

Se debe especificar que, en este caso,  $u$  será diferente a lo largo de  $XX$ . Si se trabaja con una recta, entonces la Ec. 2.34 se expresará como:

$$\frac{dW}{dt} = k \cdot u \cdot s \quad \text{Ec. 2.35}$$

Siendo  $s$  la longitud de la línea  $XX$  y  $u$  idéntica en cada punto de la línea.

De todos los valores obtenidos aplicando este método, el mejor de todos será el menor de ellos, ya que esté siempre será igual o mayor que el real.

#### 2.5.4.4 Límite Superior mediante Bloques Rígidos Triangulares: propuesta Modular

Realizando un vasto resumen de los apartados anteriores, el análisis límite es una buena alternativa ante la dificultad de obtener las soluciones exactas a problemas de conformado plástico. Empleando el Método de Límite Superior, las condiciones de equilibrio, contorno y relaciones esfuerzo-deformación no tienen por qué cumplirse estrictamente, siendo el total del esfuerzo aplicado sobre la superficie de deformación el valor que ha de mantenerse de forma estricta.

Los candidatos idóneos para la aplicación de dicha técnica son los casos de deformación plana. No obstante, siempre existe el riesgo de obtener unos resultados no satisfactorios, debiéndose asegurar que la solución es suficientemente cercana a la realidad. Es por ello que, para garantizar la concordancia del método utilizado con la realidad, se lleva a cabo la comparativa de los resultados obtenidos con el MEF, así como con el método analítico del Campo de Líneas de Deslizamiento y ensayos experimentales.

En algunos casos, se suelen dar procesos con geometrías complicadas que no permiten trabajar con ecuaciones matemáticas simples. Son este tipo de casos los que dan paso al recurso basado en la resolución recursiva de un problema, dividiendo este en dos o más sub-problemas de igual tipo o similares características. El proceso continúa hasta que llegan a ser suficientemente sencillos para resolverlos directamente. Las soluciones de cada sub-problema se combinan para dar una solución única al problema original. Es un método claramente utilizado en elementos finitos y en el cual se basará el actual Método Modular, ampliamente desarrollado en la presente tesis, aplicado al proceso de indentación.

La forma más común de división de la zona donde se produce la deformación se realiza siguiendo la dirección de los esfuerzos cortantes, como se muestra en la Figura 2.15, hodógrafo correspondiente a la Figura 2.16

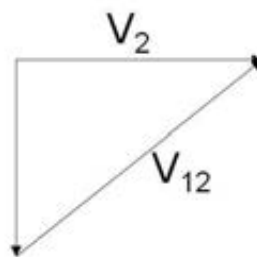


Figura 2.15: Hodógrafo Módulo A Figura 2.16

De esta forma, los hodógrafos obtenidos son mucho más simples que el que se obtendría tomando el cuarto de pieza de la Figura 2.16 como un conjunto, como se aprecia en la Figura 2.17. Disminuye el grado de complejidad del problema además de obtener soluciones que aportan valores más reducidos y, por tanto, más próximos al óptimo.

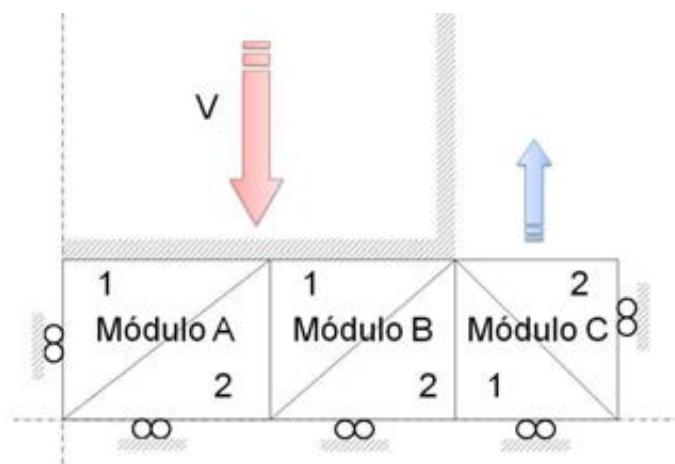


Figura 2.16: División Modular en Indentación

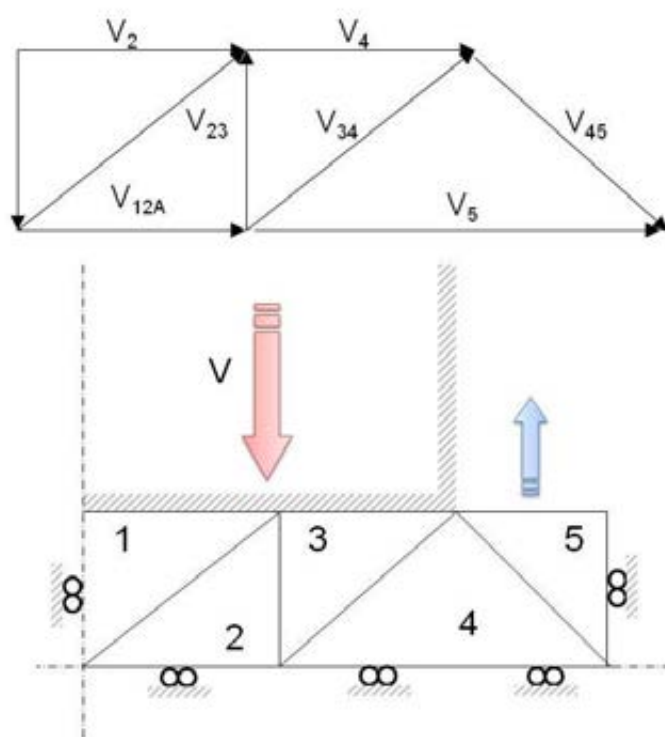


Figura 2.17: Tratamiento No Modular y Hodógrafo correspondiente

## Referencias

- [1] C. R. Calladine, *Plasticity for engineers: Theory and applications*. Cambridge (UK): Woodhead Pub Limited, 2000.
- [2] S. Kalpakjian and S. R. Schmid, *Manufacturing engineering and technology. Serope kalpakjian, steven r. Schmid*. New Jersey (USA): Prentice Hall., 2009.
- [3] L. M. Kachanov, *Fundamentals of the theory of plasticity*. New York (USA): Dover Publ., 2004.
- [4] A. Nádaí and A. M. Wahl, *Plasticity: A mechanics of the plastic state of matter*. New York (USA): McGraw-Hill Book Company, inc., 1931.
- [5] G. W. Rowe, *Conformado de los metales*. Bilbao (España): Urmo, 1972.
- [6] R. V. Mises, "Mechanik der plastischen formänderung von kristallen," *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, vol. 8, pp. 161-185, 1928.
- [7] R. V. Mises, "Mechanik der festen körper im plastisch- deformablen zustand," *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, vol. 1913, pp. 582-592, 1913.
- [8] W. Johnson and P. P. B. Mellor, *Engineering plasticity*. Chichester (U.K.): Ellis Horwood Limited, 1983.
- [9] F. Martín, "Desarrollo, integración y optimización en el estudio del proceso de forja mediante el teorema del límite superior a través del modelo de bloques rígidos triangulares," Thesis, Ingeniería de Fabricación, Universidad de Málaga, Málaga, 2009.
- [10] P. Groche, D. Fritsche, E. A. Tekkaya, J. M. Allwood, G. Hirt, and R. Neugebauer, "Incremental bulk metal forming," *CIRP Annals - Manufacturing Technology*, vol. 56, pp. 635-656, 2007.
- [11] I. De Ryck, A. Adriaens, and F. Adams, "An overview of mesopotamian bronze metallurgy during the 3rd millennium bc," *Journal of Cultural Heritage*, vol. 6, pp. 261-268, 2005.
- [12] E. G. Thomsen and H. H. Thomsen, "Drawing solid wires through soft dies in antiquity," *American Society of Mechanical Engineers (Paper)*, 1975.
- [13] C. E. Harvey and J. P. Press, "Origins and early history of the institution of mining and metallurgy, 1892-1914," *Transactions of the Institution of Mining and Metallurgy, Section A: Mining Technology*, vol. 95, pp. 171-175, 1986.
- [14] C. P. Thornton, C. C. Lamberg-Karlovsky, M. Liezers, and S. M. M. Young, "On pins and needles: Tracing the evolution of copper-base alloying at tepe yahya, iran, via icp-ms analysis of common-place items," *Journal of Archaeological Science*, vol. 29, pp. 1451-1460, 2002.
- [15] O. D. Sherby and J. Wadsworth, "Ancient blacksmiths, the iron age, damascus steels, and modern metallurgy," *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 117, pp. 347-353, 2001.
- [16] R. F. Tylecote, *A history of metallurgy*. Michigan (USA): Institute of Materials, 1992.
- [17] H. W. Dickinson, "Josph bramah and his inventions," *Engineering*, vol. 153, pp. 415-416, 1942.

- [18] K. Zeng, E. Söderlund, A. E. Giannakopoulos, and D. J. Rowcliffe, "Controlled indentation: A general approach to determine mechanical properties of brittle materials," *Acta Materialia*, vol. 44, pp. 1127-1141, 1996.
- [19] S. Suresh, A. E. Giannakopoulos, and J. Alcalá, "Spherical indentation of compositionally graded materials: Theory and experiments," *Acta Materialia*, vol. 45, pp. 1307-1321, 1997.
- [20] M. R. Vanlandingham, "Review of instrumented indentation," *Journal of Research of the National Institute of Standards and Technology*, vol. 108, pp. 249-265, 2003.
- [21] F. Grosman, Ł. Madej, S. Ziółkiewicz, and J. Nowak, "Experimental and numerical investigation on development of new incremental forming process," *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 212, pp. 2200-2209, 2012.
- [22] C. Bouffieux, P. Eyckens, C. Henrard, R. Aerens, A. Bael, H. Sol, J. R. Duflou, and A. M. Habraken, "Identification of material parameters to predict single point incremental forming forces," *International Journal of Material Forming*, vol. 1, pp. 1147-1150, 2008.
- [23] A. M. Camacho, M. M. Marín, E. M. Rubio, and M. A. Sebastian, "Application of different simulation strategies for the analysis of multi-stroke localised-incremental forming operations," *Advances in Non Conventional Materials Processing Technologies. Materials Science Forum*, vol. 713, pp. 19-24, 2012.
- [24] A. Alfozan and J. S. Gunasekera, "Design of profile ring rollin by backward simulation using upper bound element technique (ubet)," *Journal of Manufacturing Processes*, vol. 4, pp. 97-108, 2002.
- [25] I. Bagudanch, M. L. Garcia-Romeu, I. Ferrer, and J. Lupiañez, "The effect of process parameters on the energy consumption in single point incremental forming," *Procedia Engineering*, vol. 63, pp. 346-353, 2013.
- [26] S. A. Kalpakjian, S. R. A. Schmid, G. S. García, and U. F. López, *Manufactura, ingeniería y tecnología*. Mexico: Pearson Educación, 2002.
- [27] F. P. Bowden and D. Tabor, *The friction and lubrication of solids*. Oxford (UK): Clarendon Press, 1954.
- [28] S. Kobayashi, A. G. MacDonald, and E. G. Thomsen, "Some aspects of press forging," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 1, pp. 282-300, 1960.
- [29] R. H. Wagoner and J. L. Chenot, *Metal forming analysis*. U.K.: Cambridge University Press, 2001.
- [30] A. M. Sanchez and M. A. Sebastian Perez, "Métodos analíticos en deformación metálica. Desarrollo histórico y actual," *Deformación metálica*, pp. 29-37, 1984.
- [31] M. A. Sebastian, C. González, E. Gómez, and C. J. Luis, "Consideraciones al estudio mecánico de los procesos de conformado por deformación plástica," *Deformación metálica*, vol. 244, pp. 36-43, 1999.
- [32] W. A. Backofen, *Deformation processing*. Boston: Addison-Wesley Educational Publishers Inc, 1972.
- [33] W. Johnson and A. G. Mamalis, "Some force plane diagrams for plane strain slip-line fields," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 20, pp. 47-56, 1978.
- [34] B. Avitzur, *Metal forming: The application of limit analysis*. New York (USA): Dekker, 1980.

- [35] W. Johnson and P. B. Mellor, *Plasticity for mechanical engineers*: Van Nostrand, 1962.
- [36] W. Prager, *An introduction to plasticity*. California (USA): Addison-Wesley Pub. Co., 1959.
- [37] L. Brayden and J. Monaghan, "An analysis of closed-die extrusion/forging," *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 26, pp. 141-157, 1991.





# CAPÍTULO 3

---

## TEOREMA DEL LÍMITE SUPERIOR: ESTADO DEL ARTE

*Análisis, Desarrollo y Validación del Método del Límite Superior en Procesos de  
Conformado por Indentación*

---



## Índice Capítulo 3

3.1	Introducción .....	3.1
3.2	Comienzos del TLS .....	3.2
3.3	Evolución del TLS.....	3.3
3.3.1	Campos de fluencia .....	3.3
3.3.2	Casos Axi-simétricos .....	3.5
3.3.3	Casos no axi-simétricos.....	3.7
3.3.4	Introducción de factores propios del conformado plástico .....	3.9
3.3.5	TLS 3D .....	3.11
3.3.6	TLS modular .....	3.13
3.4	Aplicabilidad del TLS a procesos de fabricación por conformado plástico .....	3.15
3.4.1	Indentación .....	3.16
3.5	Otros campos de aplicación.....	3.18



### 3 TEOREMA DEL LÍMITE SUPERIOR: ESTADO DEL ARTE.

#### 3.1 Introducción

En la presente Tesis se realiza un estudio sobre la aplicación del Teorema del Límite Superior (TLS) a un proceso particular de la forja como es la indentación. Con la intención de competir con los métodos actuales de cálculos de esfuerzos, se desarrolla una aplicación simplificada del teorema. De esta forma, surge la configuración modular del teorema, que permite una implementación más sencilla y ofrece resultados ajustados conforme a los esfuerzos reales de deformación.

El objetivo del TLS es el cálculo de las fuerzas de conformado igualando la energía que se disipa internamente en el proceso de deformación analizado, en este caso el proceso de indentación, con la energía suministrada por las fuerzas externas. Este método de análisis refleja la deformación plástica mediante el desplazamiento de bloques rígidos, suponiendo un flujo de material consistente con el cambio de forma, denominado campo cinemáticamente admisible. Los estudios sobre este tipo de metodología comienzan con la hipótesis de deformación plana. No obstante, en el siguiente apartado de la presente tesis, se mostrará la amplitud del campo de estudio y el desarrollo que ha logrado en su aplicación, demostrando una posible competencia con los métodos numéricos ampliamente difundidos en la industria actual.

A lo largo de los años, este método de análisis se ha estudiado manteniendo distintas hipótesis de partida, tales como casos de deformación plana, de simetría axial, casos en tres dimensiones, aplicación a diversos procesos de fabricación y movimientos bruscos del terreno, entre otros. Cada uno de ellos aportando, desde distintas perspectivas, nuevas ideas al desarrollo de esta metodología.

En el Capítulo 2 se ha descrito la evolución de los métodos analíticos hasta llegar al TLS, teorema de nuestro actual interés. En el presente capítulo se centra la descripción en la evolución del TLS a lo largo de la historia y se procede a detallar algunos de los ensayos o aplicaciones de mayor interés y relevancia. Finalmente se realiza un repaso breve acerca de los estudios existentes sobre procesos de indentación, proceso en el cual se basa el presente estudio.

### 3.2 Comienzos del TLS

Es sabido que los procesos de conformado por deformación plástica presentan una serie de fenómenos físicos complejos de analizar, por lo que los métodos analíticos basan su empleo en el planteamiento de una serie de hipótesis simplificadoras.

La formulación del Teorema del Límite Superior (TLS) se debe a Prager y Hodge [1] en la década de los 50 del pasado siglo y, posteriormente, redefinida y mejorada por Drucker et al. [2, 3] (Figura 3.1), al incluir las velocidades correspondientes a las discontinuidades. Drucker establece, para los dos teoremas límites, suponiendo cualquier cuerpo elastoplástico perfecto, que el material expuesto a esfuerzos no presentará colapso siempre y cuando cualquiera de los estados tensionales satisfagan las situaciones de equilibrio y las condiciones de contorno, para lo cual, todos los puntos de tensión se encontrarán dentro de la superficie de fluencia. Por otro lado, el material o cuerpo presentará colapso si para cualquiera de los campos de fluencia, considerados únicamente plásticos, la fuerza externa de trabajo iguale o exceda el límite de disipación interna. De esta forma queda definido el límite inferior y superior.



Figura 3.1: D.C. Drucker  
[Fuente: Archivos UIUC]

En la misma década, A.P. Green propone diferentes campos de líneas de deslizamiento, en procesos de compresión bajo la suposición de deformación plana y material rígido plástico perfecto, para todas las proporciones de ancho de matriz y altura de bloque mayores a la unidad, realizando una comparativa posterior del TLS derivado de los estudios previos de Hill [4]. Curiosamente y en relación a la temática de la presente tesis, el método de compresión resulta ser una indentación simétrica mediante dos punzones planos. Al plantear un campo de velocidades cinemáticamente admisible (CVCA), contando únicamente con las líneas de discontinuidades, procede a una resolución de la problemática de forma más sencilla.

En el mismo artículo, Green plantea campos similares para casos de extrusión o trefilado a través de matrices que aplican grandes reducciones, sin llegar a computarizar las soluciones obtenidas de estos casos.

Posteriormente, Johnson y Kudo [5] llevarán a cabo la aplicación del TLS sobre otros procesos de conformado, como la forja y la laminación, siempre bajo condiciones ideales de deformación plana, realizando comparativas con el CLD, como se aprecia en la Figura 3.2.

Con el modelo de los Bloques Rígidos Triangulares (BRT), surgido a partir de las investigaciones de H. Kudo, se introduce el concepto de región unitaria o bloque rígido [6-9] (UBET). De esta forma, H. Kudo facilita el cálculo y establece, mediante distintas comparativas con otras geometrías y el CLD, que la forma triangular es la que ofrece los menores valores del Límite Superior. Además, a esta forma geométrica le son atribuibles los mejores campos de velocidades y unas resoluciones más sencillas. Es razonable pensar que una geometría triangular presente una resolución más sencilla, únicamente por mostrar menos superficies de

discontinuidades. Pero, además, también arroja soluciones con esfuerzos menores, lo que produce un acercamiento al esfuerzo real de deformación.

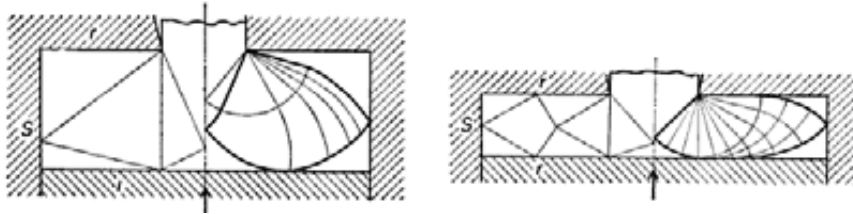


Figura 3.2: Comparativa del CLD y el TLS mediante BRT [5]

Conviene destacar que Kudo profundiza en diversos estudios muy relacionados con la industria, trabajando, por ejemplo, sobre procesos de forja a temperatura ambiente, ampliando sus estudios mediante el método de Campos de Líneas de Deslizamiento, la lubricación y caracterización de materiales. Además, lleva a cabo una extensión del estudio tanto a casos de deformación plana como a otros estudios de piezas axi-simétricas [10, 11]. Cabe destacar que, ya en 1986, de la mano de Kiuchi y Kudo [12], se presenta una introducción del TLS mediante BRT a las simulaciones y diseños asistidos por ordenador (CAS y CAD), para piezas que sufren distintos procesos de deformación mediante forja, llegando a desarrollar un proceso de simulación tridimensional compleja mediante la combinación de las técnicas de simulación más simples presentadas. Es interesante ya que el TLS, no solo compite con los métodos de resolución numérica muy presentes en los elementos finitos, si no que permite una combinación con ellos y su introducción en los procesos de simulaciones asistidas por ordenador.

### 3.3 Evolución del TLS

Posteriormente, conforme el teorema ha ido adquiriendo peso en la aplicación y resolución de problemas de deformación, se fue haciendo patente la necesidad de desarrollar el método en distintos ámbitos. De entre ellos se van a destacar los más relevantes.

#### 3.3.1 Campos de fluencia

Durante las décadas de los 60 y 70 del siglo XX, diversos investigadores estudian distintos campos de velocidades igualmente aplicables. Será Kobayashi quien revise la metodología empleada por Kudo citada anteriormente, presentando un tratamiento más extenso sobre los campos de velocidades admisibles [13-15]. Reemplaza las superficies cónicas supuestas por Kudo por superficies curvas, obteniendo una mejora en el TLS para ciertos casos de deformación axisimétrica. Presenta campos de velocidades para el flujo hacia el exterior de una región de deformación cilíndrica e introduce un nuevo campo de velocidades para el flujo a través de matrices cónicas. Los patrones de velocidad son seleccionados asumiendo una velocidad axial o radial constante, de la forma  $u = Ar^m$ , siendo  $A$  y  $m$  constantes.

Diversos campos de velocidades también pueden encontrarse en el trabajo de B. Avitzur [16, 17], en estrecho contacto con Kudo. En la Figura 3.3 se muestra una comparativa entre soluciones obtenidas mediante la aplicación de TLS y posibles patrones de fluencia en la Figura 3.4, por B. Avitzur. Los elementos básicos corresponden a formas esféricas, triangulares y trapezoidales, obteniendo las soluciones analíticas de cada uno. La comparativa revela el

grado de acuerdo entre ellos. El acuerdo que bajara es bueno pero no sería tan bueno como el que obtiene en estudios previos sobre la deformación del anillo [16].

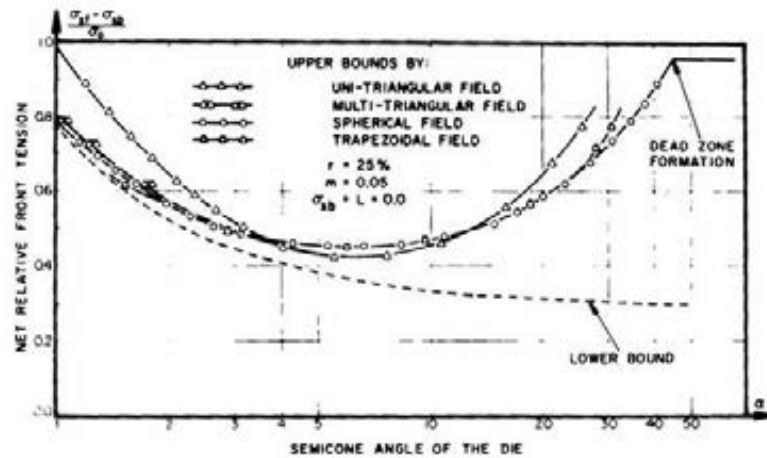


Figura 3.3. Comparación de soluciones obtenidas con TLS [17]

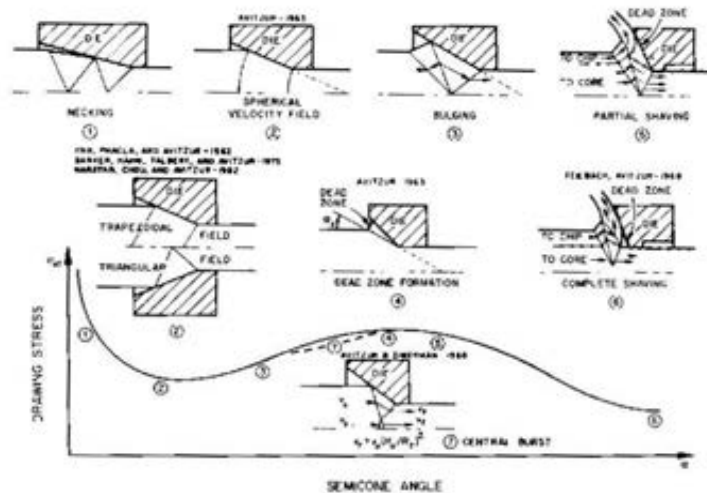


Figura 3.4: Patrones de fluencia para TLS [17]

Y. H. Moon et al [18], en la década de los 90, muestran un estudio interesante en el que se aplica múltiples campos de fluencia al estudio de un proceso de forja de doble acción. Realizando esta aplicación para diferentes condiciones geométricas, caracterizó el proceso de deformación mejor que con el campo simple de fluencia que se aplicaba comúnmente. Estos campos de velocidades o de fluencia consideran cambios conforme la deformación va avanzando. Esencialmente, lo que se obtienen son soluciones cuasi estáticas, es decir, soluciones a cada instante de deformación. Siendo cierto que arroja soluciones mejoradas, también presenta un grado de complicidad mayor al ir alternando campos de velocidad y nuevas resoluciones a cada instante de deformación considerado.

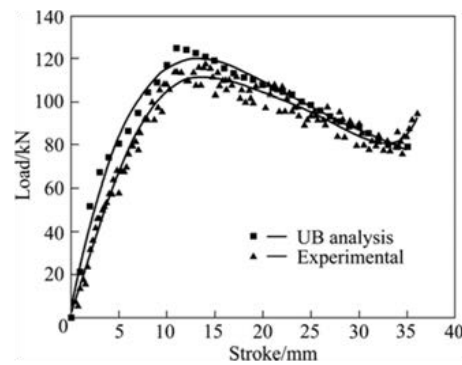
Es de destacar que diferentes estudios sobre planteamientos de nuevos campos de fluencia siguen realizándose en la actualidad, como puede ser el llevado a cabo por T. Altinbalik y O. Ayer [19], en el que proponen un nuevo CVCA para el análisis del efecto de la boquilla de entrada en forma de trébol en los procesos de extrusión, a partir de barras cilíndricas (Figura 3.5). Este estudio se presenta tanto en su forma teórica como en su forma



experimental, considerando cuatro matrices diferentes. Se selecciona el plomo como material a deformar debido a su excelente capacidad de deformación que presenta a temperatura ambiente. Los resultados obtenidos de forma analítica reflejan buena concordancia con los resultados experimentales, explicándose las mayores desviaciones debidas a diferencias entre las tolerancias dimensionales de las matrices utilizadas.



(a)



(b)

Figura 3.5: (a) Distintas matrices de experimentación y (b) comparativa de resultados [19]

### 3.3.2 Casos Axi-simétricos

Aunque es inicialmente Johnson quien extiende esta teoría a problemas con herramientas axi-simétricas [20, 21], diversos autores afrontan la problemática aplicándola sobre distintos procesos de fabricación.

W.R.D. Wilson [22] ofrece un TLS simplificado para conformado de metales en piezas axi-simétricas, utilizando para ello regiones constantes de velocidades axiales y velocidades radiales inversamente proporcionales al radio necesario para crear el CVCA, describiendo el método para la construcción de dicho campo de velocidades, discutiendo, posteriormente, su aplicación, a distintos problemas de forja. Mediante este procedimiento, las discontinuidades parabólicas son transformadas en líneas rectas, dividiendo, en el caso en el que sea necesario, las zonas primarias. En la Figura 3.6 se aprecia esta transformación de discontinuidades curvas a discontinuidades rectas. Asimismo, presenta una mejora en cuanto a los resultados de  $p/2k$  de Johnson, 2,65 frente a 2,88.

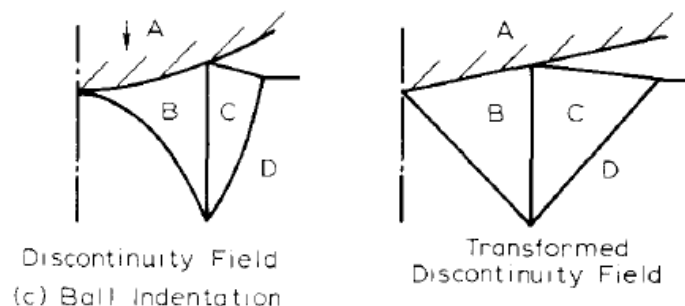


Figura 3.6: Transformación del campo de velocidades en un proceso de extrusión [22]

En contrapunto, los trabajos de Kobayashi, junto a G. Thomsen [15], sugieren el tratamiento del teorema de forma curvilínea para las superficies de discontinuidades en las regiones unitarias, mostrando una relativa mejora en cuanto a los resultados en problemas axi-

simétricos frente a los arrojados por Kudo. No obstante, se menciona que, al ser mínima esta diferencia, una comparación crítica de ambos procesos no puede llevarse a cabo. Es interesante apreciar el tratamiento de estos dos autores a la problemática axi-simétrica, ya que resultan conclusiones totalmente opuestas, prefiriendo Kobayashi un tratamiento curvo y W.R.D. Wilson la conversión de las discontinuidades curvas a rectas.

C.T. Chen y F.F. Ling. [23], trabajando sobre casos axi-simétricos, enfocan el método de selección del campo de velocidades admisible según la problemática de la extrusión. Para ello, analizan tres formas básicas de matrices: coseno, elíptica e hiperbólica. El TLS se utiliza tanto para expresar la carga necesaria para la deformación, como para la elección del patrón de deformación a través de matrices cuadradas. Finalmente, esbozan otros tipos de matrices que pueden ser analizadas con el mismo método.

Otro claro ejemplo de esta vertiente se presenta en el trabajo llevado a cabo por Y.T. Ling y J.P. Wang [24], quienes, combinando las ventajas que presentan las funciones de extremos y el MEF, especialmente la capacidad que presenta este método para el ajuste de las curvaturas, desarrollan un nuevo TLS que mejora la ineffectividad del anterior en la resolución de problemas con geometrías complejas o que necesitaban de la simulación para predecir la forma de los extremos libres de la pieza a deformar. Concluyen el diseño óptimo del teorema mediante el método de tolerancias flexibles. En el análisis del proceso de forja, se consigue un límite superior mejor que el arrojado por el UBET. Los mismos autores presentan una mejoría del método 4 años después [25], aunque los resultados presentados en ambos artículos son significativamente parecidos.

Del mismo modo, en cuanto a la relación del TLS con otros métodos de análisis, N. Venkata et al. [26] lleva a cabo una combinación de la aplicación del TLS con MEF para el diseño óptimo de matrices para extrusión axi-simétrica en caliente, modelando el material como visco-plástico y considerando su fluencia dependiente tanto del estado tensional como de la temperatura. Se analizan cuatro formas de matrices diferentes, llegando a concluir la combinación óptima entre ellas que requiere menor potencia de deformación, así como que la longitud óptima para las matrices decrece con la fricción. En la misma línea, surgen distintas aproximaciones del TLS para procesos de conformado plástico axi-simétricos, en combinación con otros procesos de análisis, como puede ser MEF [27] o funciones de forma [28].

Y.H. Moon et al. [29-31], amplían los estudios anteriores sobre la aplicación del TLS a casos de forja axi-simétricas de doble acción, con el fin de predecir y evitar el desarrollo de grietas superficiales en el lateral de las piezas. Para determinar las condiciones que desarrollan grietas superficiales, se desarrolla un CVCA para un flujo anormal, derivando de este flujo anormal un término de potencia que da cuenta de la energía disipada durante la formación de la grieta. Finalmente, se presenta el criterio para prevenir dicha aparición de grietas superficiales durante el proceso de deformación y el modelo es validado vía MEF.

Una combinación interesante es la del TLS y el CLD presente en el artículo de Bakhshi-Jooybari et al. [32], para la estimación de la carga de deformación en un proceso de extrusionado en frío, en varillas de aluminio y plomo, mediante matrices curvas. Los resultados, a su vez, se comparan con los obtenidos mediante ensayos reales y la aplicación de elementos finitos, llegando, por ambas vías, a la conclusión de que la energía requerida para deformar las varillas en matrices curvas es mejor que la necesaria para matrices cónicas. Esto implica que, aunque la fabricación de matrices con perfiles curvos es más compleja, reduce la fuerza necesaria en la deformación y, por tanto, incrementará la productividad del proceso. Sería

interesante conocer los porcentajes en cuanto a productividad entre un proceso y otro para estimar la rentabilidad de los mismos.

Recientemente se pueden encontrar trabajos sobre casos axi-simétricos, como el estudio de J. Maciejewski y Z. Mróz [33], en el que realizan un análisis mediante TLS para obtener el CVCA de un proceso de extrusión asistido mediante torsión cíclica, el cual presenta ventajas respecto al proceso convencional. Se estudia la evolución de la fuerza de extrusión y el momento de torsión, especificando el correspondiente campo de fluencia en cada caso. Dicho estudio permite la especificación de parámetros de control sobre el proceso y la relación existente con la fuerza de extrusión y el momento de torsión, así como su disipación plástica asociada para diversas reducciones de radio. Otros estudios actuales son los que se centran en procesos de microforja abierta y extrusión axi-simétrica, utilizando aproximaciones basadas en el TLS. E. Ghassemali et al. [34] realizan este estudio como respuesta a la tendencia que existe hacia la miniaturización de componentes de forma rentable y sostenible para la industria (Figura 3.7).

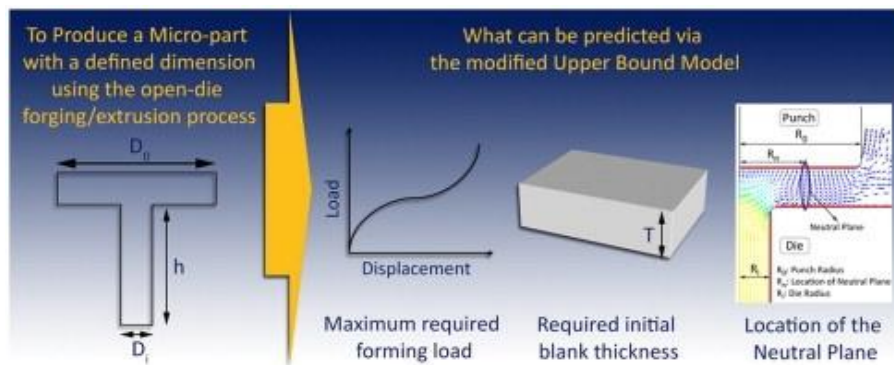


Figura 3.7: Análisis microforja abierta [26]

También cabe reseñar los estudios de H. Haghighat y G.R. Asgari [35] donde se aplica el TLS a un proceso de extrusión de tubos bi-metálicos a través de matrices arbitrariamente curvas mediante mandriles cilíndricos en movimiento, mostrando una buena concordancia con los resultados obtenidos mediante MEF. Para obtener el campo de velocidades desarrollan un sistema de coordenadas esféricas, con el que se evalúa la energía interna y la energía disipada en las superficies de discontinuidades, así como la energía total. En este tipo de estudios es donde se aprecia la capacidad del teorema para adaptarse a casi cualquier método de fabricación, aportando, una vez tratado correctamente, resultados acordes con la realidad del proceso. H. Haghighat continúa este tipo de estudio junto a M. Moradmand [36], siendo en este caso una extrusión de tubos de geometría simple pero con una mayor concordancia de los resultados entre TLS y MEF, y H. Shayesteh [37], donde vuelve a retomar las matrices arbitrariamente curvas en el extrusionado de cilindros bi-metálicos, mostrando, nuevamente, la similitud entre los resultados obtenidos.

### 3.3.3 Casos no axi-simétricos

Al igual que los casos axi-simétricos, los procesos no axi-simétricos también son ampliamente estudiados desde el punto de vista del TLS.

En artículos como el de B.C. Hwang et al [38] donde se aplica el TLS a procesos de extrusión y forja que cumplen la condición no axi-simétrica, se proponiendo un nuevo campo de velocidades (KAVF) para determinar el esfuerzo de deformación necesario y la longitud de

extrusión/deformación media. Para ello hacen uso de coordenadas tanto cilíndricas como cartesianas y validan el método mediante ensayos reales con plomo a temperatura ambiente, utilizando matrices poligonales y trocoidales sin lubricación (Figura 3.8). Comparando la carga y la longitud media extruida entre el método teórico y el experimental, se muestra la buena similitud existente entre los resultados de uno y otro, demostrando la viabilidad del teorema. Posteriormente, B.C. Hwang et al. [39] vuelven sobre este tipo de estudios en 2003, mediante la validación experimental con piezas de aleaciones de antimonio y plomo, esta vez, únicamente sobre procesos de extrusión, añadiendo la determinación de la distribución de velocidades de acuerdo con el esfuerzo producido en la extrusión. Los ensayos vuelven a realizarse a temperatura ambiente y sin lubricación, estampando una malla en la pieza a deformar para ver el patrón de fluencia. Los resultados son del orden del anterior estudio, lo que demuestra la idoneidad del teorema.

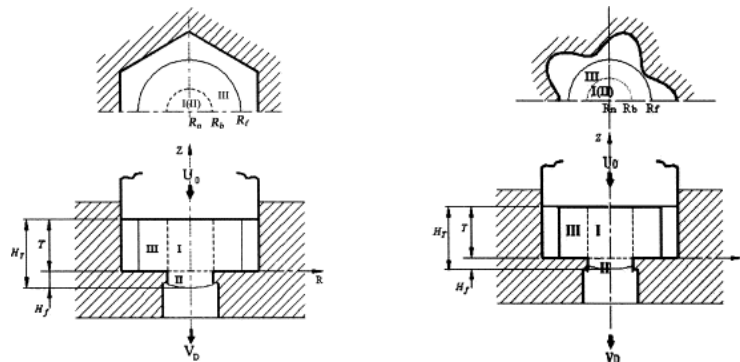


Figura 3.8: Deformación no axi-simétrica [38]

En la misma línea y durante el mismo periodo, C. T. Kwan [40] presenta un estudio sobre la forja no axi-simétrica, añadiendo las formas elípticas al análisis, a parte de las trocoidales, ya estudiadas por B.C. Hwang. Analiza preformas cilíndricas sometidas a un proceso de forja cerrada, determinando un nuevo CVCA y validando el método mediante experimentación sobre aluminio puro comercial a temperatura ambiente. Cabe destacar que, aunque los estudios resulten similares, en este caso el uso de aluminio comercial en la experimentación, acerca más el teorema al posible uso industrial del mismo ya que el plomo, aunque presenta una buena capacidad de deformación a temperatura ambiente, se aleja ligeramente del comportamiento general de los metales. Igualmente, los resultados arrojados muestran una gran compatibilidad de resultados.

Los estudios sobre forja y extrusión no axi-simétrica se suceden en artículos como el de H.I. Lee et al [41], en los que se vuelve a analizar el extrusionado de cabezas de pernos a formas hexagonales y trocoidales, determinando nuevos campos de velocidades cinemáticamente admisibles, esfuerzos de deformación, longitud de extrusión y patrones de deformación. El proceso de extrusión analizado se denomina extrusión combinada porque el material se deforma simultáneamente hacia delante y hacia atrás, en relación con el movimiento del punzón. En este caso, para establecer la longitud media de deformación se minimiza el consumo total de energía respecto a varios parámetros pseudo independientes, como son la altura del plano neutro ( $H$ ) y la función introducida para satisfacer las condiciones de contorno en cuanto a las velocidades en los ejes de simetría de la sección transversal, de la forma  $\omega_i(\theta) = R_t^{P_i} \cdot \theta \cdot A_i \cdot \sin(n_i \cdot \theta)$ , donde  $P_i$  y  $A_i$  son, a su vez, parámetros pseudo independientes,  $R$  y  $\vartheta$  son coordenadas cilíndricas y  $n_i$  el número de ejes simétricos de la forma hexagonal.

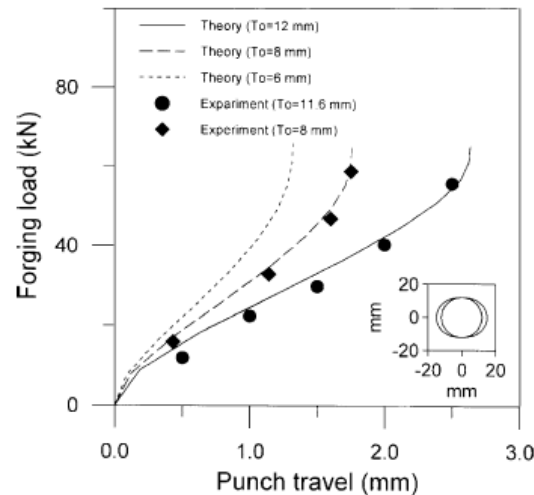


Figura 3.9: Comparativa entre resultados del TLS y ensayos reales [40]

### 3.3.4 Introducción de factores propios del conformado plástico

Se impone la necesidad de seguir indagando en la complejidad que entrañan los procesos de conformado por deformación plástica e ir añadiendo en el desarrollo del TLS los distintos parámetros que tienen cabida, como puede ser el rozamiento, el endurecimiento y la inercia.

En 1969, I. F. Collins [42, 43] demuestra la posibilidad de la incorporación del rozamiento al tratamiento del conformado mediante TLS. Habiéndose descartado esta aplicación previamente por diversos autores [44, 45], como se hace referencia en el mismo artículo [42]. Collins realiza su introducción para casos de compresión y extrusión. Este enfoque atiende a que la definición usual del CVCA es innecesariamente restrictiva para validar el TLS. Por lo que, con un tratamiento del mismo, hace presencia del rozamiento de Coulomb en la interfaz herramienta/pieza. El nuevo método resulta atractivo ya que introduce el rozamiento pero difiere muy poco del TLS general aplicado hasta el momento. De esta forma, se le aporta cierta ventaja sobre otros métodos analíticos como el Campo de Líneas de Deslizamiento (CLD), que no introducía rozamiento hasta la fecha. La desventaja que presenta este nuevo método es la necesidad de trabajar con condiciones de contorno ficticias y puede inducir a error ya que puede alejarse del patrón de deformación real. Aunque el análisis se realiza para condiciones de fricción constantes, podría ser fácilmente integrado para la variación de dicha fricción.

Por otra parte, tratando el otro espectro del rozamiento, Y. Lin y J.P Wang [46] presentan estudios sobre la introducción del rozamiento por adherencia al método,  $m=1$  para condiciones sin lubricación y  $m=0.25$  bajo lubricación, aplicado a ensayos de compresión de anillos. Los resultados se comparan con los obtenidos de otros métodos: MEF, ensayos experimentales y el método de interpolación numérica llamado “friction-area-divided method”. Desarrolla el método combinando el conocido UBET (Upper-bound elemental technique) con una función para el flujo de material, lo que denomina UBFT (Upper-bound flow function elemental technique).

S.L. Wang y K.P. Rao [47] también estudian la influencia del rozamiento en procesos de forja mediante la aplicación del TLS. Desarrolla un modelo de onda de rozamiento considerando una combinación de deformación masiva del material con las deformaciones

producidas en las discontinuidades o asperezas de la superficie donde se aplica el esfuerzo, destacando que la velocidad de deformación entre la pieza y la matriz tienen un efecto insignificante en la fuerza de rozamiento.

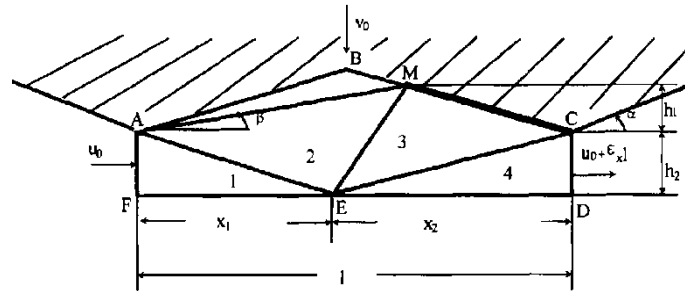


Figura 3.10: Campo de velocidades en forja con rozamiento [47]

En cuando al endurecimiento por deformación, se pueden encontrar estudios actuales debidos a E.M. Rubio et al [48, 49], en los que se centra la atención en el análisis del proceso de estirado mediante TLS mediante BRT, trabajando con materiales que presentan endurecimiento por deformación teórico, bajo hipótesis de deformación plana y rozamiento parcial. Los resultados son comparados con los obtenidos de materiales rígido-plástico perfectos, concluyendo, que, como es razonable, el esfuerzo considerando el endurecimiento por deformación es mayor y que el número de variables posibles incrementa debido a que el límite de estabilidad del proceso también incrementa.

Para este tipo de tratamiento, se pueden encontrar estudios anteriores realizados por Avitzur [50, 51], Hosford y Caddell [52], así como Rowe [53], en los que se resuelven problemas de estirado mediante métodos analíticos y se establecen expresiones que reflejan el influjo del endurecimiento por deformación. N. Medeiros y L.P. Moreira [54] aplican el TLS a procesos actuales, como el ECAP, para materiales con endurecimiento por deformación, extendiendo la solución propuesta por Eivani y K. Taheri [55] en 2007 para calcular los esfuerzos necesarios para el procesamiento del material bajo distintas condiciones de fricción y geometría de la matriz para materiales plástico-perfectos. Para ello, hacen uso del modelo de Hollomon combinado con el criterio de von Mises para materiales plásticos isotrópicos, validando los resultados mediante MEF. Adicionalmente, con el TLS propuesto, se consigue un análisis de la dependencia del ángulo del proceso, la tensión plástica efectiva y la fuerza de presión con la altura instantánea de la pieza a la entrada de la zona de deformación. Una vez más se aplica el TLS, bajo sus distintas consideraciones, a procesos de fabricación actuales, demostrando la versatilidad del método.

M. A. Bhutta y N. R. Chitkara [56] presentan un análisis simple del proceso de forja incremental mediante el TLS, comparando los resultados con los obtenidos experimentalmente. Posteriormente [57], amplían el estudio mediante una adaptación del TLS y la modificación del CLD para el ajuste al actual perfil de deformación estudiado, validando, nuevamente, los resultados mediante experimentación (Figura 3.11). Finalmente, realizan un estudio aplicando el TLS modificado desarrollado en posteriores estudios, introduciendo las fuerzas de inercia para conformado de engranajes rectos y con ranuras [58]. Mediante la introducción de este efecto se consigue un mejor ajuste entre los resultados del teorema y los experimentales. En esta consecución de artículos se observa claramente como el TLS va desarrollándose y creciendo para abarcar distintos aspectos presentes en el proceso de deformación estudiado en este caso, manifestando la capacidad de método para adaptarse a los distintos supuestos.



J. Moller et al. [59] presentan una ampliación del TLS para la predicción de las tensiones y las temperaturas alcanzadas en procesos de forja, acoplado el teorema a formulación de energía. El estudio se realiza para material que presenta endurecimiento por deformación, lo que deja ver la posible combinación en el teorema de los distintos parámetros que se han ido mostrando en este apartado. Es posible consultar distintos estudios realizados por diversos autores [60-63] que introducen la temperatura en sus estudios sobre TLS, combinando el teorema con MEF, obteniendo predicciones sobre la evolución de la distribución de tensiones y la temperatura en la pieza conformada. La combinación del TLS con MEF presente en estas investigaciones, muestra la capacidad del teorema para adecuarse a los distintos tratamientos posibles del mismo, incorporándolo a las nuevas tecnologías de análisis.



Figura 3.11: Cambios progresivos en el conformado incremental de engranajes [57]

Por lo que, como se ha comentado anteriormente,, se demuestra la versatilidad del método del TLS en cuanto a su adaptabilidad a los distintos PCDP y la posibilidad de inclusión de los factores que en ellos intervienen.

### 3.3.5 TLS 3D

Es importante destacar que otra vertiente del ámbito del TLS se decanta por estudiar casos de deformación tridimensionales, viendo la necesidad de abordar casos que resultaban incompatibles con el análisis en dos dimensiones. Un claro ejemplo está presente en el trabajo de V. Ranatunga et al. [64], donde incorporan un análisis del TLS a un proceso complejo de conformado de anillos. El perfil de la forma estudiada se aproxima mediante elementos prismáticos triangulares y bloques rectangulares, aportando una solución general para el CVCA propuesto para el campo de fluencia en 3D que surge en el conformado. La comprobación de los resultados se realiza mediante su comparativa con MEF, presentando una diferencia máxima de un 10%. No obstante, se indica que la precisión del método puede mejorar introduciendo más elementos, pero que, al mismo tiempo, se aumentaría el número de parámetros desconocidos y se complicaría la resolución del método. También destaca la rapidez del método frente al MEF, ya que el TLS, una vez obtenido, se resuelve en minutos, frente a las horas que presenta el MEF.

No es difícil encontrar modelos tridimensionales del TLS, como el mostrado por de J. Hou y U. Ståhlberg [65] en 1996, que introduce bloques tridimensionales para particional la pieza e incorpora velocidades de deformación no uniformes dentro para cada elemento; o el de J. M. Pitt-Francis et al. [66], en el mismo año, presentando un nuevo método para modelar la fluencia del metal con comportamiento plástico perfecto, en procesos de forja, mediante una malla tetraédrica y un campo de velocidades lineal por tramos, conocido como TEUBA (Tetrahedral elemental upper-bound analysis) [67, 68]; o modelos como el de R. K. Sahoo et al [69], ya en el 2003, que adapta la denominada técnica de los elementos espaciales rígidos (SERR, spatial elementary rigid región technique) a superficies curvas, limitado en ese aspecto hasta el momento. Estos tipos de formulaciones son sustancialmente más rápidas en

resolución de la problemática que los presentados hasta el momento para análisis tridimensionales.

También en 2003, A. M. Puzrit y M. F. Randolph [70], introducen un nuevo campo de velocidades planar para el análisis del TLS, ya que anteriores campos de velocidades para casos tridimensionales se encontraban restringidos a sistemas de coordenadas ortogonales. De esta forma, se extiende la aplicación a variaciones de velocidades radiales o planas, para estados de carga horizontales en cimientos circulares o verticales en cimientos no circulares, apreciándose como el teorema va creciendo y adaptándose según las nuevas necesidades que van surgiendo en los distintos análisis.

Con trabajos como el de R. S. Lee y S. T. Kwan [71] se abarca el estudio del TLS mediante la aproximación tridimensional para superficies no planas, introduciendo elementos esféricos convexos y paralelepípedos circulares convexos, aplicados a un proceso de forja cerrada con superficies curvas convexas (Figura 3.12). Se aprecia que son diversos los autores que centran sus estudios en la aplicación del TLS para procesos en tres dimensiones, ya sea abarcando el problema desde una perspectiva analítica o introduciendo la formulación mediante las herramientas MEF disponibles, como se ha mostrado en apartados anteriores.

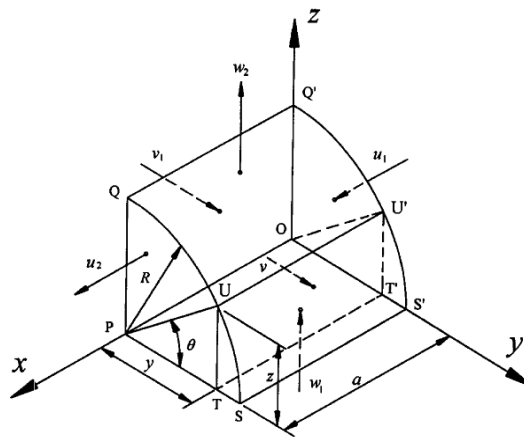


Figura 3.12: Campo de velocidades para un paralelepípedo circular convexo [71]

Sobre la combinación del Teorema con Métodos numéricos, claros ejemplos quedan patentes en los trabajos publicados por V. Ranatunga y J. A. Gunasekera [72] o G. Milani y P. B. Lourenco [73]. El primero de ellos integra el TLS en la metodología del MEF. Utilizan la ventaja que ofrece el TLS en cuanto a simplicidad y rapidez, incorporándola en el análisis de elementos finitos para conseguir una solución más precisa sobre procesos de conformado de anillos sin soldadura y forja cerrada, validando el método mediante experimentación real. El segundo trabajo mencionado estudia la adaptación del análisis del TLS simple mediante programación lineal-secuencial para la adaptación del mallado. Para ello considera elementos triangulares rígidos, para extremos tanto rectos como curvos, permitiendo un cambio en las velocidades en la interfaz entre elementos contiguos, dando paso a la disipación plástica en las superficies curvas. Es necesario introducir un mallado iterativo para enriquecer el modelo y, por tanto, obtener resultados más acordes con la realidad del proceso.



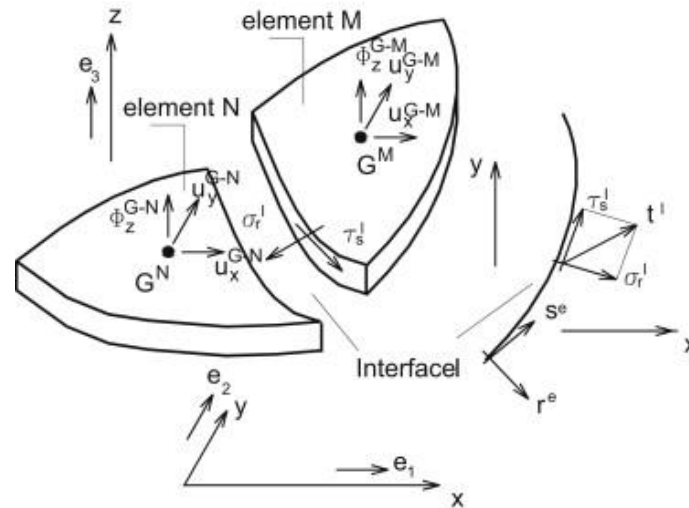


Figura 3.13: Aproximación del TLS al mallado secuencial [73]

### 3.3.6 TLS modular

Debido a la complejidad que puede presentar el TLS en la resolución analítica de los problemas de conformado, se desarrolla la posibilidad de llevar a cabo una aplicación del teorema desde una perspectiva modular.

F. Martín [74-77], basando sus estudios en la investigación de H. Kudo sobre la aplicación del TLS a diversos procesos de conformado, desarrolla una nueva forma de aplicación del teorema mediante módulos de BRT, lo que facilita la resolución del método aprovechando la sencillez que aporta esta nueva forma analítica. Esta nueva formulación radica en la división modular del problema a resolver, estando compuesto cada módulo por diversos BRT y siendo el caso estudiado un proceso de forja. De esta forma, es posible acotar la resolución a un número determinado de bloques cada vez, facilitando el análisis y reproduciendo los módulos tantas veces como sea necesario hasta abarcar la geometría objeto de estudio. El TLS llega a presentar una complejidad elevada cuando se examina una geometría en la que es preciso plantear numerosos BRT para abarcar la pieza o sección estudiada. Esta desventaja, como se ha comentado, se ataja con la introducción de módulos de no más de tres BRT, limitando dicha complejidad y permitiendo obtener resultados precisos. En la Figura 3.14 se muestra la diferencia entre la aplicación no modular y modular a una misma pieza.

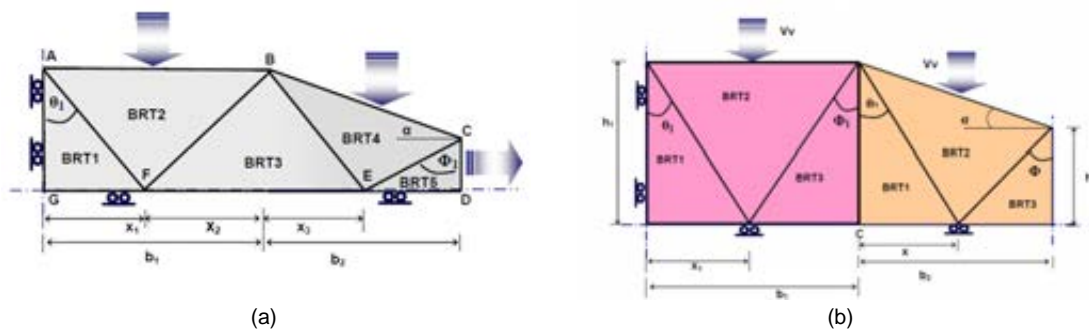


Figura 3.14: Enfoque no modular (a) y modular (b) aplicado al mismo proceso de conformado [74]

Siguiendo esta perspectiva de división del proceso analizado en la aplicación del TLS, L. Yinguo y S. Sheng [78] describen los puntos básicos para el estudio de la simulación inversa

de la forja con TLS, introduciendo un nuevo enfoque mediante la Técnica de Simulación por Bloque (Simulation Block Technique, SBT). Con este estudio, se consigue descomponer la pieza final en distintos bloques que irán deformándose mediante una fluencia inversa a la producida por el proceso de forja, tanto en frío como en caliente, obteniéndose la preforma original. Es decir, partiendo de la posición cerrada de las matrices, estas se separan progresivamente al mismo tiempo que el material en la cavidad se deforma, surgiendo un movimiento opuesto al movimiento normal de deformación en un proceso de forja. Al final se obtiene la preforma original de la pieza final de la que se parte. En este artículo, el método se utiliza para controlar la creación de rebaba una vez finalizado el proceso de forja, calculando el material inicial necesario para obtener la mínima rebaba posible, lo que garantizaría un ahorro de material importante en una fabricación en línea, como se aprecia en la

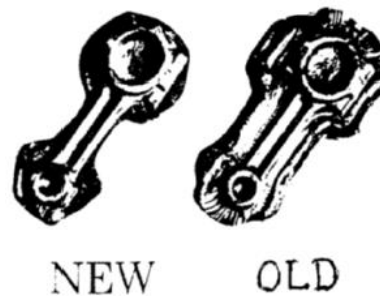


Figura 3.15: Disminución en la formación de rebaba una vez aplicado el SBT [78]

En la misma línea, se presenta el estudio de Almohaileb [79], donde se abarca la adquisición de la forma necesaria de la matriz, para obtener una pieza determinada, mediante el desarrollo de modelos matemáticas basados en el TLS Modificado (Modified Upper Bound Element Technique, MUBET), mediante la simulación inversa. En este caso, los CVCA se derivan en base a una aproximación de volumen y se evalúan de forma que minimice la energía total, determinando diferentes parámetros del proceso como puede ser la forma intermedia o preforma de la geometría final o la carga de trabajo, validando finalmente el modelo mediante MEF. Wei-Ching Yeh y Ming-Chang Wu [80] presentan el método del TLS variacional (Variational Upper-Bound method, VUB) para un caso de forja de anillos. Se aplica el TLS mediante cálculo variacional, pudiendo, de esta forma, plantear las condiciones de contorno naturales y derivarlas teóricamente con ayuda de las funciones de flujo asumidas inicialmente. Los resultados obtenidos se comparan con la aplicación general del TLS y con modelos MEF, así como con los datos obtenidos de ensayos experimentales.

En este mismo apartado se puede englobar otro acercamiento que resulta interesante, como es la aplicación del TLS mediante capas. Durante el año 2000, en adelante, se comenzará a desarrollar plenamente esta técnica, como muestra el artículo presentado por H. Hsu y G. Tzou [81], en el que se estudia la compresión de una chapa con doble recubrimiento mediante el TLS y el método del Campo de Líneas de Deslizamiento (CLD). De la aplicación del TLS obtiene la forma final de la superficie exterior, la distribución de la tensión efectiva y la fuerza de compresión necesaria para llevar a cabo el proceso, mientras que de la aplicación del CLD solo obtiene la distribución de tensiones. M.A. Selles et al. [82-84] muestra la aplicación del TLS mediante capas a la fabricación de latas.

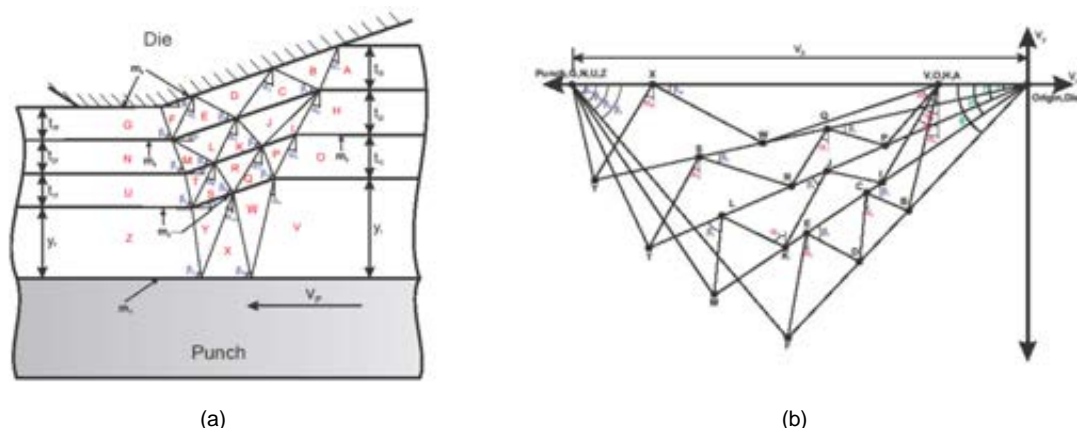


Figura 3.16: Aplicación del TLS mediante capas (a) y hodógrafo derivado (b) [82]

### 3.4 Aplicabilidad del TLS a procesos de fabricación por conformado plástico

Cabe destacar que, después de haber desarrollado el TLS sobre los diversos ámbitos comentados en apartados anteriores, resulta interesante recoger su aplicabilidad a procesos de fabricación por conformado plástico, vistas las enormes posibilidades que presenta el método. Queda establecida la capacidad del TLS de ofrecer predicciones de resultados próximos a los esfuerzos reales, con cierto grado de precisión, comparándolo con los resultados obtenidos mediante los ensayos pertinentes y diversos métodos numéricos, como el Método de Elementos Finitos (MEF). Por ejemplo, L. Brayden y J. Monaghan [85] aplican el estudio del TLS al análisis de un proceso de extrusión y forja cerrada, comparando los resultados con los obtenidos mediante ensayos experimentales. J. Hou [86] estudia su aplicación también a la formación de cavidades profundas en procesos de forja cerrada, lo que podría asemejarse al proceso de indentación, comparando los resultados y validando el método mediante MEF. E.M. Rubio [87] trabaja con el TLS en el estirado de tubos, realizando una comparativa con otro método analítico como es el CLD y numéricos como MEF, como en el trabajo de F.J. Olivares et al. [88], en el que el TLS aplicado a procesos de forja abierta se comparan con otros métodos analíticos y numéricos; o el artículo de Alforzan [89], donde se trabaja sobre extrusión inversa.

Aplicado a procesos de fabricación más complejos o en desarrollo, se pueden encontrar estudios sobre la aplicación del TLS a la extrusión en canal angular constante, ECAE en sus siglas en inglés (Equal Channel Angular Extrusion) y/o ECAP (Equal Channel Angular Pression). En este ámbito se pueden encontrar trabajos como el de J. Alkorta y J. Gil [90], que analizan el proceso denominado ECAP bajo la perspectiva del TLS y el MEF, tanto para casos de material plástico perfecto, como en presencia de endurecimiento por deformación (Figura 3.17); estudios como el de B.S. Altan et al. [91], que aplican el TLS al estudio de procesos de ECAE; o artículos como el de C.J. Luis [92], que presentan una nueva configuración en la que la deformación no dependerá de los radios de deformación del proceso, hasta un determinado radio a partir del cual se considerará flexión. Este mismo autor presenta trabajos en la misma línea pero aplicados al ECAE [93, 94].

Los procesos de forja orbital, en auge en estos últimos años, también tienen cabida en su estudio bajo el análisis del TLS, como muestran los artículos de S. Choi et al. [95], aunque se pueden encontrar estudios de este proceso mediante TLS del año 1989, de la mano de K.H. Na y N.S. Cho [96]. Y. Wu et al. se centran más en su aplicación sobre la forja radial [97], mientras que en el trabajo de F.J. Olivares se presenta aplicado a distintos procesos de conformado incremental de piezas volumétricas [98], como los autores M.J. Mirnia y B.M. Dariani [99].

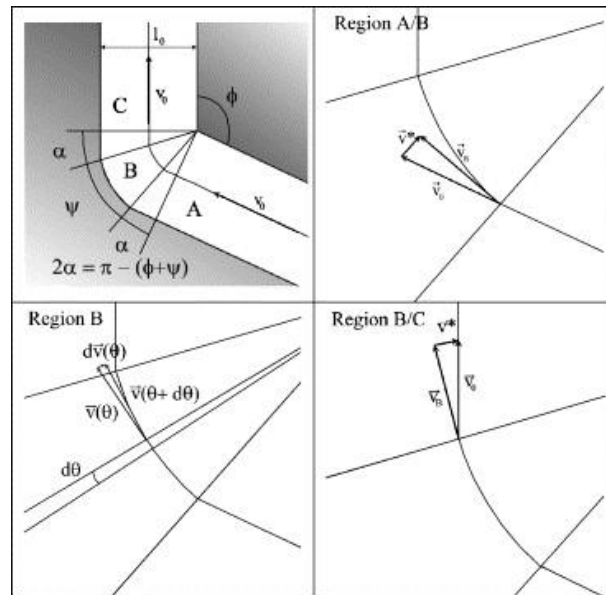


Figura 3.17: ECAP Análisis mediante TLS bajo condiciones de deformación plana [90]

El teorema también puede aplicarse para la consecución de la forma óptima considerando diferentes espesores para procesos de conformado de chapa [100-102], en procesos de fabricación de tubos [103-105] y en procesos de forja de precisión [106], entre otros.

En este ámbito de la manufactura es donde se centra la presente tesis, destacando el proceso de indentación como base de los nuevos procesos de deformación que se encuentran en desarrollo en la actualidad, dentro de los denominados procesos de deformación plástica incremental

### 3.4.1 Indentación

En el presente estudio, continuando con las investigaciones de F. Martín en cuanto a la aplicación modular del TLS, se abarcará el proceso de indentación, proceso particular de la forja en el que la matriz es sustancialmente de menor tamaño que la pieza que estará sometida a deformación. Por lo que, brevemente, se realizará un barrido por algunos de los estudios que abarcan la indentación como objeto de estudio para, finalmente, recalcar la importancia que sigue teniendo este método de conformado hoy día.

Ya en trabajos como el realizado por Meguid et al. [107] se analizaban indentaciones simultáneas. Es decir, sobre una misma superficie, realizar una indentación con dos punzones lo suficientemente cerca el uno del otro para entender la interferencia que podrían tener entre ellos y, así mismo, sobre la zona de deformación. Mediante los ensayos se establecía a qué distancia los punzones actuaban de forma independiente, por lo que la deformación y el esfuerzo de cada uno serían los mismos que los producidos por un único punzón. Este estudio presenta importancia debido a la interacción que presentan las zonas plásticas entre sí en relación a campos de estudio como pueden ser la fricción, procesos como el “shot peening” y mecanismos como los rodamientos. Cabe destacar que el análisis teórico es realizado mediante el CLD y el TLS, analizando el efecto del radio de interferencia entre ambos punzones, la altura y el endurecimiento por deformación, la presión de indentación y, en posteriores estudios con MEF [108] la tensión residual una vez retirados los punzones.

Por otro lado, el estudio de las relaciones existentes entre endurecimiento y el límite elástico se remonta a trabajos como Los de Bishop et al. [109], o Hill et al.[110]. Es en 1948, cuando Tabor [111, 112] propone un método para determinar la curva tensión deformación usando los resultados de los ensayos de una indentación esférica. Des de entonces, distintos son los métodos propuestos para extraer las propiedades mecánicas básicas de los materiales, tales como el módulo de elasticidad, la tensión de fluencia o el exponente de endurecimiento por deformación de dichas curvas de carga-desplazamiento.

Posteriormente, Johnson [113] sugiere una relación entre el endurecimiento y la tensión de fluencia para una indentación en cuña, utilizando un modelo consistente en una cavidad con presión interior. Otro modelo de indentación cónica axisimétrica basado en el TLS, es aportado por Bay y Wanheim en [114]

Tekkaya [115] repite el experimento de Tabor mediante métodos numéricos como el MEF, asumiendo materiales como elasto-plásticos y endurecimiento isotrópico. Considerando una velocidad de indentación baja, se puede concluir que la indentación será independiente de la temperatura y la velocidad del indentador. Se reemplaza la indentación Vickers por una cónica, tridimensional y en ausencia de rozamiento. De esta forma, los experimentos virtuales pasan a ser axisimétricos. Además, se selecciona un ángulo del cono de forma que el volumen de material desplazado formará la misma huella de penetración que una indentación piramidal o cónica.

Por medio de esta reducida introducción, se puede apreciar que los procesos de indentación han sido ampliamente estudiados en el campo de la deformación plástica, desde los clásicos ensayos de dureza o caracterización de materiales [113, 116-120], los ensayos sobre el comportamiento de indentaciones simultaneas sobre la misma pieza [107, 108], o los ensayos sobre piezas multi-capas [121-123] (Figura 3.18). Actualmente, con el desarrollo de nuevas formas de conformado plástico, como son la forja incremental, se vuelve a centrar la atención sobre este tipo de métodos de deformación, ya que la indentación, como proceso singular, forma parte de la mayoría de las técnicas incrementales [124-127]. Por ello, se presenta la idoneidad de estudiar la adaptación del TLS, mediante módulos de BRT, al proceso de indentación enfocado al ámbito de la manufactura, con el fin de seguir ofreciendo una alternativa a los métodos numéricos, dada la simplicidad que muestra la aplicación del TLS una vez desarrollado.

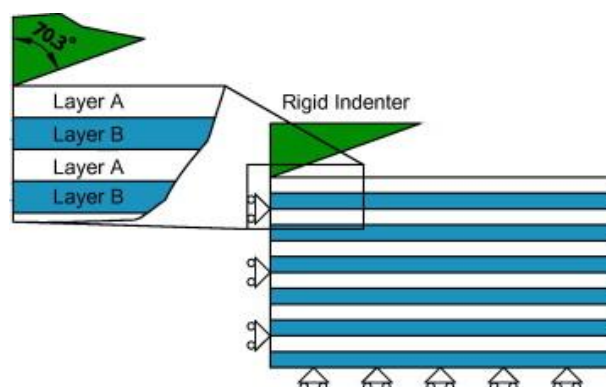


Figura 3.18: Indentación sobre material multi-capa [121]

### 3.5 Otros campos de aplicación

Con la misma brevedad, para finalizar la revisión del arte sobre el TLS, se ha considerado interesante mencionar la aplicabilidad de este método sobre ámbitos diferentes al de la manufactura. Es interesante descubrir que el TLS se encuentra ampliamente aceptado y desarrollado en el análisis de mecánica de suelos. Se aplica con el fin de resolver problemas geotécnicos y conocer la capacidad de soporte de los mismos, como el trabajo que recogen M. Huang y H.-L. Qin [128], en el que desarrollan una solución mediante bloques rígidos múltiples, frente a la opción de combinar el TLS con MEF. Por tanto, el teorema no sólo es considerado para procesos industriales, sino también en el estudio de suelos, corrimientos de tierra, estabilidad de laderas, etc. [129-131]. Por ejemplo, en el artículo de H. R. Wang et al [132] se muestra el estudio de la estabilidad de la pared de contención para la construcción de túneles, en caso de existir filtraciones. Resulta interesante mencionar este apartado de aplicación ya que se pueden encontrar diversas similitudes con el caso de indentación, como puede ser cuando se estudia la respuesta de los apoyos en el suelo [133] (Figura 3.19).

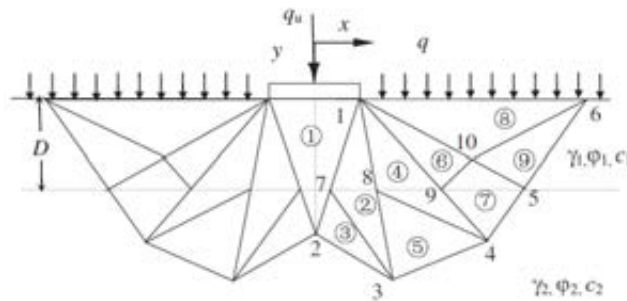


Figura 3.19: Similitud entre la aplicación del TLS a estudios sobre suelos e indentación [128]

Finalizando el repaso sobre el estado del arte, se puede concluir que, como se ha mostrado en párrafos anteriores, el TLS resulta un método versátil, capaz de adaptarse a geometrías y procesos cada vez más complejos. Se aprecia que, conforme se han ido desarrollando los distintos métodos para abarcar los diferentes casos de conformado que pueden presentarse en la industria, se han ido desplegando nuevos estudios que optimizaban las técnicas anteriores, llegando a grados de precisión nada desdeñables e intentando mantener siempre la filosofía del TLS, en cuanto a la simplicidad de aplicación, una vez desarrollado, en comparación con otros métodos analíticos.



## Referencias

- [1] W. Prager and P. G. Hodge, *Theory of Perfectly Plastic Solids*. Michigan (U.S.A.): John Wiley & Sons, 1951.
- [2] D. C. Drucker, H. J. Greenberg, and W. Prager, "The safety factor of an elastic body in plane strain," *Journal of Applied Mechanics*, vol. 73, pp. 371-378, 1951.
- [3] D. C. Drucker, "Limit analysis of two and three dimensional soil mechanics problems," *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 1, pp. 217-226, 1953.
- [4] A. P. Green, "XCII. A theoretical investigation of the compression of a ductile material between smooth flat dies," *Philosophical Magazine Series 7*, vol. 42, pp. 900-918, 1951/08/01 1951.
- [5] W. Johnson and H. Kudo, *The mechanics of metal extrusion*: Manchester University Press, 1962.
- [6] H. Kudo, "An upper-bound approach to plane-strain forging and extrusion-I," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 1, pp. 57-83, 1960.
- [7] H. Kudo, "An upper-bound approach to plane-strain forging and extrusion-II," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 1, pp. 229-252, 1960.
- [8] H. Kudo, "An upper-bound approach to plane-strain forging and extrusion-III," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 1, pp. 366-368, 1960.
- [9] H. Kudo, "Upper bound approach to metal forming processes - To date and in the future," in *Metal Forming and Impact Mechanics*, S. R. Reid, Ed., ed: Pergamon, 1985, pp. 19-45.
- [10] H. Kudo, "Some analytical and experimental studies of axi-symmetric cold forging and extrusion—I," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 2, pp. 102-127, 1960.
- [11] H. Kudo, "Some analytical and experimental studies of axi-symmetric cold forging and extrusion—II," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 3, pp. 91-117, 1961.
- [12] M. Kiuchi and H. Kudo, "Complex Simulation System of Forging Based on UBET," *CIRP Annals - Manufacturing Technology*, vol. 35, pp. 147-150, 1986.
- [13] S. Kobayashi, "Upper-Bound Solutions of Axisymmetric Forming Problems—I," *Journal of Manufacturing Science and Engineering*, vol. 86, pp. 122-126, 1964.
- [14] S. Kobayashi, "Upper-Bound Solutions of Axisymmetric Forming Problems—II," *Journal of Manufacturing Science and Engineering*, vol. 86, pp. 326-332, 1964.
- [15] S. Kobayashi and E. G. Thomsen, "Upper- and Lower-Bound solutions to axisymmetric compression and extrusion problems," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 7, pp. 127-148, 1965.
- [16] B. Avitzur, *Metal forming; processes and analysis*: McGraw-Hill, 1968.
- [17] B. Avitzur, "A Personal Look on My Involvement in the Recent History of Metal Forming Research," presented at the Third Intern. Conf. on Tech. of Plasticity (ICTP), Kyoto, Japan, 1990.
- [18] Y. H. Moon, C. J. Van Tyne, and W. A. Gordon, "The use of multiple flow fields for continuous solutions from upper-bound analysis," *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 52, pp. 561-569, 1995.

- [19] T. Altinbalik and O. Ayer, "Effect of die inlet geometry on extrusion of clover sections through curved dies: Upper Bound analysis and experimental verification," *Transactions of Nonferrous Metals Society of China*, vol. 23, pp. 1098-1107, 2013.
- [20] W. Johnson and P. B. Mellor, *Plasticity for mechanical engineers*: Van Nostrand, 1962.
- [21] W. Johnson and P. P. B. Mellor, *Engineering Plasticity*. Chichester (U.K.): Ellis Horwood Limited, 1983.
- [22] W. R. D. Wilson, "A simple upper-bound method for axisymmetric metal forming problems," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 19, pp. 103-112, 1977.
- [23] C. T. Chen and F. F. Ling, "Upper-bound solutions to axisymmetric extrusion problems," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 10, pp. 863-879, 1968.
- [24] Y. T. Lin and J. P. Wang, "A new upper-bound elemental technique approach to axisymmetric metal forming processes," *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, vol. 33, pp. 135-151, 1993.
- [25] Y. T. Lin and J. P. Wang, "A new upper-bound elemental technique approach," *Computers & Structures*, vol. 65, pp. 601-611, 1997.
- [26] N. Venkata Reddy, R. Sethuraman, and G. K. Lal, "Upper-bound and finite-element analysis of axisymmetric hot extrusion," *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 57, pp. 14-22, 1996.
- [27] Q. Liu, W. Shichun, and S. Sheng, "Preform design in axisymmetric forging by a new FEM-UBET method," *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 74, pp. 218-222, 1998.
- [28] J. W. Park, Y. H. Kim, and W. B. Bae, "An upper-bound analysis of metal forming processes by nodal velocity fields using a shape function," *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 72, pp. 94-101, 1997.
- [29] Y. H. Moon, C. J. Van Tyne, and W. A. Gordon, "An upper bound analysis of a process-induced side-surface defect in forgings: Part 1: The velocity fields and power terms," *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 99, pp. 169-178, 2000.
- [30] Y. H. Moon, C. J. Van Tyne, and W. A. Gordon, "An upper bound analysis of a process-induced side-surface defect in forgings: Part 2: Characteristics and criteria curves," *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 99, pp. 179-184, 2000.
- [31] Y. H. Moon and C. J. Van Tyne, "Validation via FEM and plasticine modeling of upper bound criteria of a process-induced side-surface defect in forgings," *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 99, pp. 185-196, 2000.
- [32] M. Bakhshi-Jooybari, M. Saboori, M. Noorani-Azad, and S. J. Hosseinipour, "Combined upper bound and slab method, finite element and experimental study of optimal die profile in extrusion," *Materials & Design*, vol. 28, pp. 1812-1818, 2007.
- [33] J. Maciejewski and Z. Mróz, "An upper-bound analysis of axisymmetric extrusion assisted by cyclic torsion," *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 206, pp. 333-344, 2008.
- [34] E. Ghassemali, M.-J. Tan, A. E. W. Jarfors, and S. C. V. Lim, "Optimization of axisymmetric open-die micro-forging/extrusion processes: An upper bound approach," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 71, pp. 58-67, 2013.



- [35] H. Haghighat and G. R. Asgari, "A generalized spherical velocity field for bi-metallic tube extrusion through dies of any shape," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 53, pp. 248-253, 2011.
- [36] H. Haghighat and G. R. Asgari, "Prediction of deformation mode of bi-metallic rod extrusion through arbitrarily curved dies," *Gazi University Journal of Science*, vol. 26, pp. 427-437, 2013.
- [37] H. Haghighat and H. Shayesteh, "Upper bound analysis for hybrid sheet metals extrusion process through curved dies," *Transactions of Nonferrous Metals Society of China*, vol. 24, pp. 3285-3292, 2014.
- [38] B. C. Hwang, S. J. Hong, and W. B. Bae, "An UBET analysis of the non-axisymmetric extrusion/forging process," *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 111, pp. 135-141, 2001.
- [39] B. C. Hwang, H. I. Lee, and W. B. Bae, "A UBET analysis of the non-axisymmetric combined extrusion process," *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 139, pp. 547-552, 2003.
- [40] C. T. Kwan, "An analysis of the closed-die forging of a general non-axisymmetric shape by the upper-bound elemental technique," *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 123, pp. 197-202, 2002.
- [41] H. I. Lee, B. C. Hwang, and W. B. Bae, "A UBET analysis of non-axisymmetric forward and backward extrusion," *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 113, pp. 103-108, 2001.
- [42] I. F. Collins, "The upper bound theorem for rigid/plastic solids generalized to include Coulomb friction," *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 17, pp. 323-338, 1969.
- [43] I. F. Collins, "Boundary Value Problems in Plane Strain Plasticity," in *Mechanics of Solids*, H. G. Hopkins and M. J. Sewell, Eds., ed Oxford: Pergamon, 1982, pp. 135-184.
- [44] D. C. Drucker, "Coulomb friction, plasticity and limit loads," *Journal of Applied Mechanics*, vol. 21, pp. 71-74, 1954.
- [45] R. Hill, "A general method of analysis for metal-working processes," *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 11, pp. 305-326, 1963.
- [46] Y.-T. Lin and J.-P. Wang, "An investigation into the constant friction factor with the upper-bound flow function elemental technique," *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 36, pp. 57-68, 1992.
- [47] S. L. Wang and K. P. Rao, "An upper-bound analysis of friction in metal forming," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 39, pp. 201-209, 1997.
- [48] E. M. Rubio, M. Marín, R. Domingo, and M. A. Sebastián, "Analysis of plate drawing processes by the upper bound method using theoretical work-hardening materials," *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, vol. 40, pp. 261-269, 2009.
- [49] E. M. Rubio, "Energetic analysis of tube drawing processes by the Upper Bound Method using theoretical work-hardening materials," *Metal Forming*, vol. 1, pp. 1-4, 2012.
- [50] B. Avitzur, *Metal forming: the application of limit analysis*. New York (USA): Dekker, 1980.
- [51] S. H. Talbert and B. Avitzur, *Element mechanics of plastic flow in metal forming*. New York: Wiley, 1996.

- [52] W. F. Hosford and R. M. Caddell, *Metal Forming: Mechanics and Metallurgy*. Cambridge (UK): Cambridge University Press, 2011.
- [53] G. W. Rowe, *Elements of Metalworking Theory*: E. Arnold, 1979.
- [54] N. Medeiros and L. P. Moreira, "Upper-bound analysis of die corner gap formation for strain-hardening materials in ECAP process," *Computational Materials Science*, vol. 91, pp. 350-358, 2014.
- [55] A. R. Eivani and A. Karimi Taheri, "An upper bound solution of ECAE process with outer curved corner," *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 182, pp. 555-563, 2007.
- [56] N. R. Chitkara and M. A. Bhutta, "Near net shape spline forging: An experimental investigation and a simple upper bound analysis," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 37, pp. 1247-1268, 1995.
- [57] N. R. Chitkara and M. A. Bhutta, "Forging and heading of hollow spur gear forms: an analysis and some experiments," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 41, pp. 1159-1189, 1999.
- [58] M. A. Bhutta and N. R. Chitkara, "Dynamic Forging of Splines and Spur Gear Forms: A Modified Upper Bound Analysis that Includes the Effects of Inertia and Some Experiments," *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, vol. 18, pp. 176-192, 2001/08/01 2001.
- [59] J. Moller, L. Tran, D. Shrader, J. R. Douglas, and G. W. Kuhlman, "Augmented upper bound element technique for prediction of temperature and strain in forgings," *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 152, pp. 162-175, 2004.
- [60] H. G. Hosseinabadi and S. Serajzadeh, "Hot extrusion process modeling using a coupled upper bound-finite element method," *Journal of Manufacturing Processes*, vol. 16, pp. 233-240, 2014.
- [61] S. Serajzadeh and Y. Mahmoodkhani, "A combined upper bound and finite element model for prediction of velocity and temperature fields during hot rolling process," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 50, pp. 1423-1431, 2008.
- [62] S. K. Sahoo, P. K. Kar, and K. C. Singh, "A numerical application of the upper-bound technique for round-to-hexagon extrusion through linearly converging dies," *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 91, pp. 105-110, 1999.
- [63] A. S. Wifi, Z. S. Abduljabbar, and M. T. Sakr, "A combined UBET/FEM investigation of metal flow and stress analysis of dies in extrusion processes," *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 24, pp. 431-440, 1990.
- [64] V. Ranatunga, J. S. Gunasekera, S. P. Vaze, and U. De Souza, "Three-Dimensional UBET Simulation Tool for Seamless Ring Rolling of Complex Profiles," *Journal of Manufacturing Processes*, vol. 6, pp. 179-186, 2004.
- [65] J. Hou and U. Ståhlberg, "A three-dimensional UBET model applied to the forging of square blocks between flat dies and grooved dies of simple geometry," *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 62, pp. 81-89, 1996.
- [66] J. M. Pitt-Francis, A. Bowyer, and A. N. Bramley, "A Simple 3D Formulation for Modeling Forging Using the Upper Bound Method," *CIRP Annals - Manufacturing Technology*, vol. 45, pp. 245-248, 1996.
- [67] A. N. Bramley, "UBET and TEUBA: fast methods for forging simulation and preform design," *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 116, pp. 62-66, 2001.

- [68] C. C. Chang and A. N. Bramley, "A New Forging Preform Design Approach Using Reverse Simulation," *CIRP Annals - Manufacturing Technology*, vol. 47, pp. 193-196, 1998.
- [69] R. K. Sahoo, P. K. Kar, and S. K. Sahoo, "3D upper-bound modeling for round-to-triangle section extrusion using the SERR technique," *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 138, pp. 499-504, 2003.
- [70] A. M. Puzrin and M. F. Randolph, "New planar velocity fields for upper bound limit analysis," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 40, pp. 3603-3619, 2003.
- [71] R. S. Lee and C. T. Kwan, "Upper-Bound Elemental Technique (UBET) with convex circular parallelepiped and convex spherical elements for three-dimensional forging analysis," *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, vol. 37, pp. 1053-1067, 1997.
- [72] V. Ranatunga and J. Gunasekera, "UBET-based numerical modeling of bulk deformation processes," *Journal of Materials Engineering and Performance*, vol. 15, pp. 47-52, 2006/02/01 2006.
- [73] G. Milani and P. B. Lourenco, "A discontinuous quasi-upper bound limit analysis approach with sequential linear programming mesh adaptation," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 51, pp. 89-104, 2009.
- [74] F. Martín, "Desarrollo, integración y optimización en el estudio del proceso de forja mediante el teorema del límite superior a través del modelo de bloques rígidos triangulares," Ingeniería de Fabricación, Universidad de Málaga, Málaga, 2009.
- [75] F. Martín, L. Sevilla, A. Camacho, and M. A. Sebastian, "Upper Bound Solutions of Ring Compression Test," *Procedia Engineering*, vol. 63, pp. 413-420, 2013.
- [76] F. Martín, L. Sevilla, and M. A. Sebastian Perez, "Optimización de módulos en la aplicación del Teorema del Límite Superior en procesos de forja," *Anales de Ingeniería Mecánica*, 2010.
- [77] F. Martín, L. Sevilla, and M. A. Sebastian Perez, "Implementation of technological and geometrical parameters in forging processes by means of the Upper Bound Element Technique," *AIP Conference Proceeding*, vol. 1181(1), pp. 455-463, 2009.
- [78] L. Yiguo and S. Sheng, "Reverse simulation using the simulation block technique and its application in the precision forging process," *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 63, pp. 244-247, 1997.
- [79] M. Almohaileb, J. S. Gunasekera, B. V. Mehta, and B. Oyekanmi, "Modified Upper Bound Elemental Technique (MUBET) for Preform Design in Closed Die Forging," *AIP Conference Proceedings*, vol. 712, pp. 2062-2067, 2004.
- [80] W.-C. Yeh and M.-C. Wu, "A variational upper-bound method for analysis of upset forging of rings," *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 170, pp. 392-402, 2005.
- [81] H.-H. Hsu and G.-Y. Tzou, "Two analytical models of double-layer clad sheet compression forming based on the upper bound and the slab methods," *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 140, pp. 604-609, 2003.
- [82] M. A. Sellés, S. Sánchez-Caballero, M. A. Peydró, and D. Juárez, "A new method for can manufacturing," *Annals of the Oredia University. Fascicle of Management and Technological Engineering*, vol. IX (XIX), 2010.

- [83] M. A. Sellés, S. R. Schmid, S. Sánchez-Caballero, E. Perez-Bernabeu, and M. J. Reig, "Upper-bound modelization of an ironed three-layered polymer-coated steel strip," *International Journal of Advanced Manufacturing Technology* 2012.
- [84] M. A. Sellés, S. R. Schmid, and V. J. Seguí, "Ironability of a three-layered polymer coated steel: Part 1: Experimental investigation," *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 202, pp. 7-14, 2008.
- [85] L. Brayden and J. Monaghan, "An analysis of closed-die extrusion/forging," *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 26, pp. 141-157, 1991.
- [86] J. Hou, "A plane-strain UBET analysis of material flow in a filled deep die cavity in closed-die forging," *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 70, pp. 103-110, 1997.
- [87] E. M. Rubio, "Analytical methods application to the study of tube drawing processes with fixed conical inner plug: Slab and Upper Bound Methods," *Journal of Achievements in Materials and Manufacturing Engineering*, vol. 14, pp. 119-130, 2006.
- [88] F. J. Olivares, A. M. Camacho, and M. A. Sebastian, "Analysis of technological factors in open die forging by comparison of different analysis methods," *4th Manufacturing Engineering Society International Conference, MESIC 2011*, 2011.
- [89] A. Alfozan and J. S. Gunasekera, "An upper bound elemental technique approach to the process design of axisymmetric forging by forward and backward simulation," *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 142, pp. 619-627, 2003.
- [90] J. Alkorta and J. Gil Sevillano, "A comparison of FEM and upper-bound type analysis of equal-channel angular pressing (ECAP)," *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 141, pp. 313-318, 2003.
- [91] B. S. Altan, G. Purcek, and I. Miskioglu, "An upper-bound analysis for equal-channel angular extrusion," *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 168, pp. 137-146, 2005.
- [92] C. J. Luis, "Upper bound analysis and FEM simulation of equal fillet radii angular pressing," *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, vol. 12, pp. 205-214, 2004.
- [93] C. J. Luis and R. Luri, "Study of the ECAE process by the upper bound method considering the correct die design," *Mechanics of Materials*, vol. 40, pp. 617-628, 2008.
- [94] R. Luri and C. J. Luis Pérez, "Upper Bound Analysis of the ECAE Process by Considering Strain Hardening Materials and Three-Dimensional Rectangular Dies," *Journal of Manufacturing Science and Engineering*, vol. 130, pp. 051006-051006, 2008.
- [95] S. Choi, K. H. Na, and J. H. Kim, "Upper-bound analysis of the rotary forging of a cylindrical billet," *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 67, pp. 78-82, 1997.
- [96] K. H. Na and N. S. Cho, "Analysis of plane-strain rotational compression using the upper-bound method," *Journal of Mechanical Working Technology*, vol. 19, pp. 211-222, 1989.
- [97] Y. Wu, X. Dong, and Q. Yu, "An upper bound solution of axial metal flow in cold radial forging process of rods," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 85, pp. 120-129, 2014.
- [98] F. J. Olivares, "Caracterización analítica y numérica de procesos de conformado incremental localizado de piezas volumétricas," Departamento de Ingeniería de Construcción y Fabricación, UNED, Madrid, 2013.

- [99] M. J. Mirnia and B. M. Dariani, "Analysis of incremental sheet metal forming using the upper-bound approach," *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part B: Journal of Engineering Manufacture*, vol. 226, pp. 1309-1320, August 1, 2012 2012.
- [100] A. Agrawal, N. V. Reddy, and P. M. Dixit, "Optimal blank shape prediction considering sheet thickness variation: An upper bound approach," *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 196, pp. 249-258, 2008.
- [101] H. Mulki and T. Mizuno, "Contact mechanics of zinc-coated steel sheets," *Wear*, vol. 199, pp. 260-267, 1996.
- [102] A. N. Doğruoğlu, "On constructing kinematically admissible velocity fields in cold sheet rolling," *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 110, pp. 287-299, 2001.
- [103] K. Abrinia and H. R. Farahmand, "An upper bound analysis for the reshaping of thick tubes with experimental verification," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 50, pp. 342-358, 2008.
- [104] A. Panteghini, "An analytical solution for the estimation of the drawing force in three dimensional plate drawing processes," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 84, pp. 147-157, 2014.
- [105] A. Panteghini and F. Genna, "An engineering analytical approach to the design of cold wire drawing processes for strain-hardening materials," *International Journal of Material Forming*, vol. 3, pp. 279-289, 2010/12/01 2010.
- [106] H.-H. Hsu, "A study on precision forging of spur gear forms and spline by the upper bound method," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 44, pp. 1543-1558, 2002.
- [107] S. A. Meguid, I. F. Collins, and W. Johnson, "The co-indentation of a layer by two flat plane or spherical-headed, rigid punches," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 19, pp. 1-9, 1977.
- [108] S. A. Meguid and M. S. Klair, "Elasto-plastic co-indentation analysis of a bounded solid using finite element method," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 27, pp. 157-168, 1985.
- [109] R. F. Bishop, R. Hill, and N. F. Mott, "The theory of indentation and hardness tests," *The proceedings of the phisical society*, vol. 57, pp. 147-159, 1945.
- [110] R. Hill, E. H. Lee, and S. J. Tupper, "The theory of indentation of ductile materials," *Proceedings of the physical society*, vol. 188, pp. 273-289, 1947.
- [111] D. Tabor, *A Simple Theory of Static and Dynamic Hardness* vol. 192, 1948.
- [112] I. M. Hutchings, "The contrinution of David Tabor to science of indentation hardness," *Journal of Materials Research*, vol. 24, pp. 581-589, 2008.
- [113] K. L. Johnson, "The correlation of indentation experiments," *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 18, pp. 115-126, 1970.
- [114] N. Bay and T. Wanheim, "Axisymmetric upper bound theory applied to indentation of cones," *International Journal of Production Research* vol. 12, pp. 195-208, 1974.
- [115] A. E. Tekkaya and K. Lange, "An Improved Relationship between Vickers Hardness and Yield Stress for Cold Formed Materials and its Experimental Verification," *CIRP Annals - Manufacturing Technology*, vol. 49, pp. 205-208, 2000.



- [116] D. S. Dugdale, "Cone indentation experiments," *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 2, pp. 265-277, 1954.
- [117] A. G. Atkins and D. Tabor, "Plastic indentation in metals with cones," *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 13, pp. 149-164, 1965.
- [118] D. S. Dugdale, "Experiments with pyramidal indenters—Part I," *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 3, pp. 197-205, 1955.
- [119] A. E. Giannakopoulos, P. L. Larsson, and R. Vestergaard, "Analysis of Vickers Indentation," *International Journal of Solids Structures*, vol. 31, pp. 2679-2708, 1994.
- [120] Z. Song and K. Komvopoulos, "Elastic-plastic spherical indentation: Deformation regimes, evolution of plasticity and hardening effect," *Mechanics of Materials*, vol. 61, pp. 91-100, 2013.
- [121] C. K. S. Moy, M. Bocciarelli, S. P. Ringer, and G. Ranzi, "Indentation and imprint mapping for the identification of material properties in multi-layered systems," *Computational Materials Science*, vol. 50, pp. 1681-1691, 2011.
- [122] M. Zhao, H. Liu, C. Fan, E. Pan, and T.-Y. Zhang, "Indentation stress in multi-layer delaminated thin films induced by a microwedge indenter," *Composites Part B: Engineering*, vol. 45, pp. 845-851, 2013.
- [123] K. Komvopoulos and J. Yang, "Dynamic analysis of single and cyclic indentation of an elastic-plastic multi-layered medium by a rigid fractal surface," *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 54, pp. 927-950, 2006.
- [124] P. Siczek, K. Isik, N. Ben Khalifa, P. A. F. Martins, and A. E. Tekkaya, "Mechanics of sheet-bulk indentation," *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 214, pp. 2387-2394, 2014.
- [125] M. Tkocz and F. Grosman, "Application of Incremental Metal Forming for Production of Aircraft Integral Panels," *Solid State Phenomena*, vol. 212, pp. 243-246, 2014.
- [126] C. Bernal, A. M. Camacho, M. M. Marín, and B. de Agustina, "Methodology for the evaluation of 3D surface topography in Multiple Indentation Processes," *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, vol. 69, pp. 2091-2098, 2013/12/01 2013.
- [127] A. M. Camacho, M. M. Marín, E. M. Rubio, and M. A. Sebastián, "Modeling strategies for efficient FE simulation of localised-incremental forging processes," *AIP Conference Proceedings*, vol. 1431, pp. 725-732, 2012.
- [128] M. Huang and H.-L. Qin, "Upper-bound multi-rigid-block solutions for bearing capacity of two-layered soils," *Computers and Geotechnics*, vol. 36, pp. 525-529, 2009.
- [129] Y. J. Wang, J. H. Yin, and Z. Y. Chen, "Calculation of bearing capacity of a strip footing using an upper bound method," *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, vol. 25, pp. 841-851, 2001.
- [130] A. H. Soubra, "Upper-bound solutions for bearing capacity of foundation," *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, vol. 125, pp. 59-68, 1999.
- [131] R. L. Michalowski, "Limit analysis of weak layers under embankments," *Soils and Foundations*, vol. 33, pp. 155-168, 1993.

- [132] H.-R. Wang, M.-S. Huang, X.-L. Lu, and W.-X. Zhou, "Upper-bound limit analysis of stability of shield tunnel face considering seepage," *Yantu Gongcheng Xuebao/Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, vol. 35, pp. 1696-1704, 2013.
- [133] C. Wai-Fah, *Limit analysis and soil plasticity*. U.S.A: J. Ross Publishing, 2008.





# CAPÍTULO 4

---

## APLICACIÓN DEL TLS MEDIANTE MÓDULOS DE BRT EN INDENTACIÓN

*Análisis, Desarrollo y Validación del Método del Límite Superior en Procesos de Conformado por Indentación*

---



## Índice Capítulo 4

4.1	Introducción del TLS aplicado a la Indentación.....	4.1
4.2	Aplicación modular .....	4.5
4.3	Esquema del procedimiento .....	4.7
4.4	Construcción del hodógrafo.....	4.9
4.5	Rozamiento considerado.....	4.10
4.5.1	Rozamiento externo (punzón-pieza).....	4.10
4.5.2	Rozamiento interno (pieza-pieza).....	4.11
4.5.3	Tratamiento general .....	4.13
4.6	Evolución del modelo .....	4.14
4.6.1	Planteamiento 1: Modelo de partida.....	4.14
4.6.2	Planteamiento 2 .....	4.16
4.6.3	Planteamiento 3 .....	4.18
4.6.4	Planteamiento 4 .....	4.19
4.6.5	Planteamiento 5 .....	4.20
4.6.6	Piezas de espesor intermedio .....	4.22
4.6.6.1	Estudios y Deformaciones .....	4.27
4.6.7	Planteamiento 5 optimizado .....	4.31
4.6.8	Planteamiento 6 .....	4.33
4.6.9	Modelo Adoptado .....	4.37
4.6.10	Esquema de la evolución del modelo .....	4.38



## 4. APLICACIÓN DEL TLS MEDIANTE MÓDULOS DE BRT EN INDENTACIÓN

### 4.1 Introducción del TLS aplicado a la Indentación

Como se ha comentado en el apartado anterior, se realizará el presente estudio mediante la aplicación del Teorema del Límite Superior (TLS) considerando la particularización cinético-geométrica que recibe el nombre de modelo de Bloques Rígidos Triangulares (en adelante BRT) [1-3]. Dicha particularización arroja soluciones con un elevado grado de exactitud y permite un amplio abanico de posibilidades de análisis de los factores que influyen en los procesos de conformado plástico, como es el caso de la indentación. Otros métodos analíticos alternativos, como el Campo de Líneas de Deslizamiento, presentan una mayor complejidad de análisis.

Generalmente, trabajando con la consideración de deformación plana, entre diferentes campos de velocidades admisibles puede observarse que el mejor tipo de campo de velocidades es aquél que se compone por bloques triangulares, siendo sus superficies de interferencia las superficies de discontinuidad. Esto se debe a que un campo compuesto por bloques rígidos triangulares, normalmente, fluye con menor grado de energía disipada y, además, permite un cálculo relativamente sencillo [4].

Al suponer BRT, se considerará que el efecto de cizalladura, provocado por la deformación llevada a cabo por la compresión del punzón en el material a conformar, sucederá únicamente en las superficies planas que delimitan cada triángulo. Será a lo largo de estas superficies donde existirán discontinuidades en las velocidades, tal y como se ha explicado en el capítulos anteriores. Al tratar el problema aplicando la hipótesis de deformación plana, estas superficies de discontinuidad pasan a tratarse como líneas rectas en el estudio bidimensional. El resto de los puntos que conforman la figura triangular se moverán a la misma velocidad y en la misma dirección, simplificando el proceso de cálculo.

Será en las superficies de discontinuidad existentes entre bloques donde aparecerán las velocidades relativas en los elementos contiguos, siendo en las zonas donde existe interferencia entre punzón y pieza donde se incorpora el rozamiento. Será preciso diferenciar entre rozamiento por adherencia y rozamiento por

deslizamiento y otorgar a dichos coeficientes diferentes valores, según la situación estudiada.

Este método proporciona un valor por exceso de la potencia necesaria para realizar la deformación, posibilita la valoración del rozamiento en términos tecnológicos, discrimina entre las distintas componentes de energía y permite optimizar la geometría, más aún si se considera el empleo del modelo modular. Además, permite la introducción del rozamiento en el modelo así como la incorporación del endurecimiento y la temperatura [5].

El modelo geométrico tratará la cuarta parte de la pieza sometida al proceso de conformado [3]. Ya que ésta posee una doble simetría geométrica en el plano y se está estudiando piezas macizas bajo la mencionada hipótesis de deformación plana [6-10], no será necesario un análisis completo de la misma. Debido al empleo de este tipo de hipótesis, solo se tendrá en cuenta la deformación que se produce en dos de los 3 ejes considerados, por lo que la deformación en la dirección del tercer eje, perpendicular a la máxima longitud del punzón (profundidad de la misma), se considera nula.

La pieza bajo estudio se dispondrá entre dos punzones planos (disposición PP, Figura 4.1) o inclinados (disposición PI, Figura 4.2), según el caso que se esté analizando, con el objetivo de disponer de un desarrollo amplio de posibles perfiles de punzonado.

Por lo tanto, si se analiza el cuarto superior derecho, es decir, la zona número 2 de la Figura 4.1, disponiendo las condiciones de contorno que se muestran en la Figura 4.3, se deberá diferenciar entre cuatro superficies. Las superficies 1-4 y 4-3 tendrán impedidos los desplazamientos perpendiculares a ellas, quedando la superficie 2-3 con libertad de fluencia horizontal.

La superficie 1-2, a diferencia que en el caso de la forja [5], tendrá impedida la fluencia vertical únicamente en la zona donde se encuentra el punzón, lo que habrá de ser estudiado con especial atención a la hora de plantear el correspondiente hodógrafo.

De forma teórica y en casos de deformación plana tales como el tratado hasta el momento, el TLS puede enunciarse de la siguiente forma:

*<<...El trabajo realizado por las fuerzas superficiales reales, de tracción o compresión, sobre un cuerpo rígido-plástico perfecto es menor o igual que el realizado por las fuerzas superficiales, de tracción o compresión, correspondientes a cualquier otro campo de velocidades admisible cinemáticamente...>> [11]*

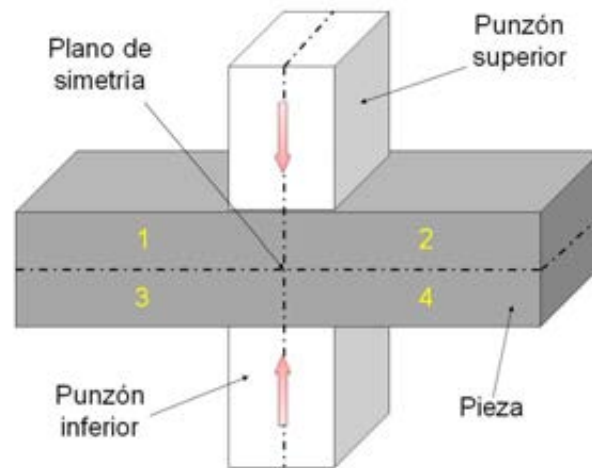


Figura 4.1: Disposición pieza entre punzones planos (PP)

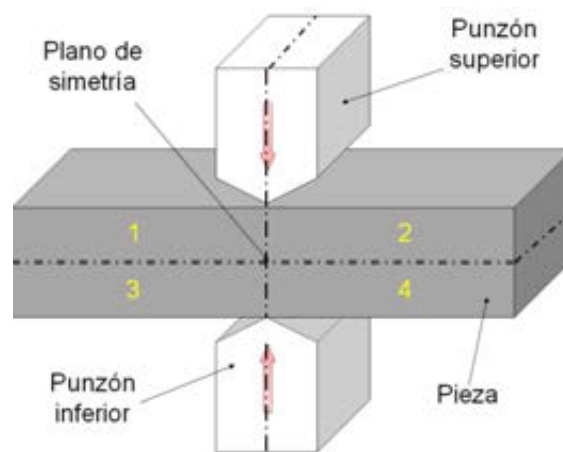


Figura 4.2 Disposición pieza entre punzones inclinados (PI)

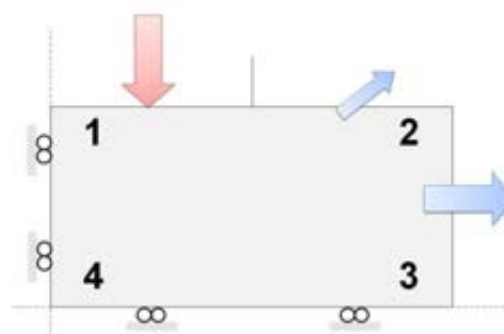


Figura 4.3: Condiciones de contorno para un cuarto de pieza

Es necesario citar la sugerencia realizada por Johnson [12] en la que, según la suposición de la hipótesis de deformación plana y de que el cuerpo se representa por bloques rígidos de material moviéndose unos sobre otros a lo largo de las citadas líneas de discontinuidad del campo de velocidades, se obtendrá la expresión general siguiente, después de diferentes simplificaciones:

Ec. 4.1

$$\int_{S_v} T_i v_i dS_v \leq \int_{S_D} k [v^*_i] dS_D^*$$

Siendo

- $T_i$  Fuerzas externas aplicadas sobre la pieza a deformar
- $v_i$  Campo real de velocidades
- $S_v$  Superficies de aplicación de las cargas exteriores
- $k$  Límite de fluencia por tensión a cortadura
- $v^*_i$  Campo de velocidades virtual y cinemáticamente admisible
- $S_D^*$  Superficies de discontinuidad

El material opodrá su máxima resistencia a la deformación cuando la tensión cortante en los lados opuestos de cada bloque sea igual a la tensión de fluencia a cortadura del material analizado ( $\tau=k$ ).

Sabiendo esto, el valor de la potencia disipada, debida a la energía interna, no podrá exceder el valor de  $k \cdot s \cdot v^*_i$ , siendo  $s$ , en casos de deformación plana, la longitud de las líneas de discontinuidad de las velocidades tangenciales.

Conocida la relación anterior, es posible plantear el valor del trabajo realizado por las fuerzas exteriores en función de las superficies analizadas:

$$\frac{dW}{dt} \leq \frac{dE}{dt} = k \cdot s \cdot v^* \quad \text{Ec. 4.2}$$

Siendo  $E$  la energía interna disipada por unidad de longitud.

Aplicada la ecuación anterior al campo de velocidades que se extrae del planteamiento realizado para el análisis de la indentación, en el que todas las líneas eran rectas, la expresión que se empleará en el proceso de resolución será:

$$\frac{dW}{dt} \leq \sum k \cdot s \cdot v^* \quad \text{Ec. 4.3}$$

En procesos de deformación plástica como la indentación, así como en la extrusión, el punzonado y el estirado, la fluencia sin restricciones del material comienza cuando éste se encuentra en un estado plástico. Es por ello que las tensiones elásticas se vuelven despreciables de forma temprana a lo largo de toda la zona plástica, menos en las zonas de contorno. Y si esta zona de transición o contorno es lo suficientemente delgada, no se producen errores significantes al omitir las



deformaciones elásticas, suponiendo un material rígido-plástico para la determinación de las tensiones y de las velocidades de deformación [13].

## 4.2 Aplicación modular

En anteriores estudios desarrollados por F. Martín [5, 14] se demuestra la mejora sustancial que presenta la aplicación del presente Teorema si se emplea una metodología alternativa a la tradicional, consistente en el empleo de módulos de BRT, en lugar de la división del campo de deformación en bloques no agrupados. De esta forma, se consiguen valores de esfuerzos menores a los obtenidos con un proceso no modular, por lo que se optimizan los resultados dado que, dado su fundamento, al aplicar el TLS, los resultados alcanzados siempre serán iguales o mayores a los reales. Por consiguiente, el valor óptimo siempre será el menor que podamos conseguir frente al proceso no modular.

El estudio mediante módulos consiste en la subdivisión del problema en módulos formados por no más de tres BRT, conectados entre sí mediante las velocidades de salida de los módulos precedentes. Mediante esta subdivisión, además de conseguir mejores resultados, se consiguen ecuaciones más simples y la resolución del problema se realiza con mayor rapidez y sencillez, en general. Un claro ejemplo se puede observar en las Ec. 4.4, Ec. 4.5 y Ec. 4.6

$$\left(\frac{p}{2k}\right)_T = \frac{1}{2b_1} \cdot [4h_1^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + (b - x_1 - x_2 - x_3)^2 + m \cdot (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2^2 + x_2x_3) + mb \cdot (b - x_1 - x_2 - x_3)] \quad \text{Ec. 4.4}$$

$$\left(\frac{p}{2k}\right)_A = \frac{h_1}{b_1} \cdot \frac{b \cdot (1 + m)}{4h_1} \quad \text{Ec. 4.5}$$

$$\left(\frac{p}{2k}\right)_B = \frac{1}{2b_2h_2} \cdot \left[2 \cdot \left(\frac{b_2^2}{4} + h_2^2\right) + \frac{mb_2}{2} \cdot (2b_1 + b_2)\right] \quad \text{Ec. 4.6}$$

Que se desprenden del análisis realizado por F. Martín [5] en la comparativa del modelo modular y no modular, mostrados en la Figura 4.4.

Siendo:

$$x_1 = \frac{m \cdot (b - x_2 - x_3) - 2x_2 - 2x_3 + 2b}{4}$$

$$x_2 = \frac{b \cdot (4 - m^2) + x_3 \cdot (m^2 + 4m - 12)}{(4 - m^2)}$$

$$x_3 = \frac{b \cdot (m^4 - 7m^2 + 12)}{16m^2 - 128}$$

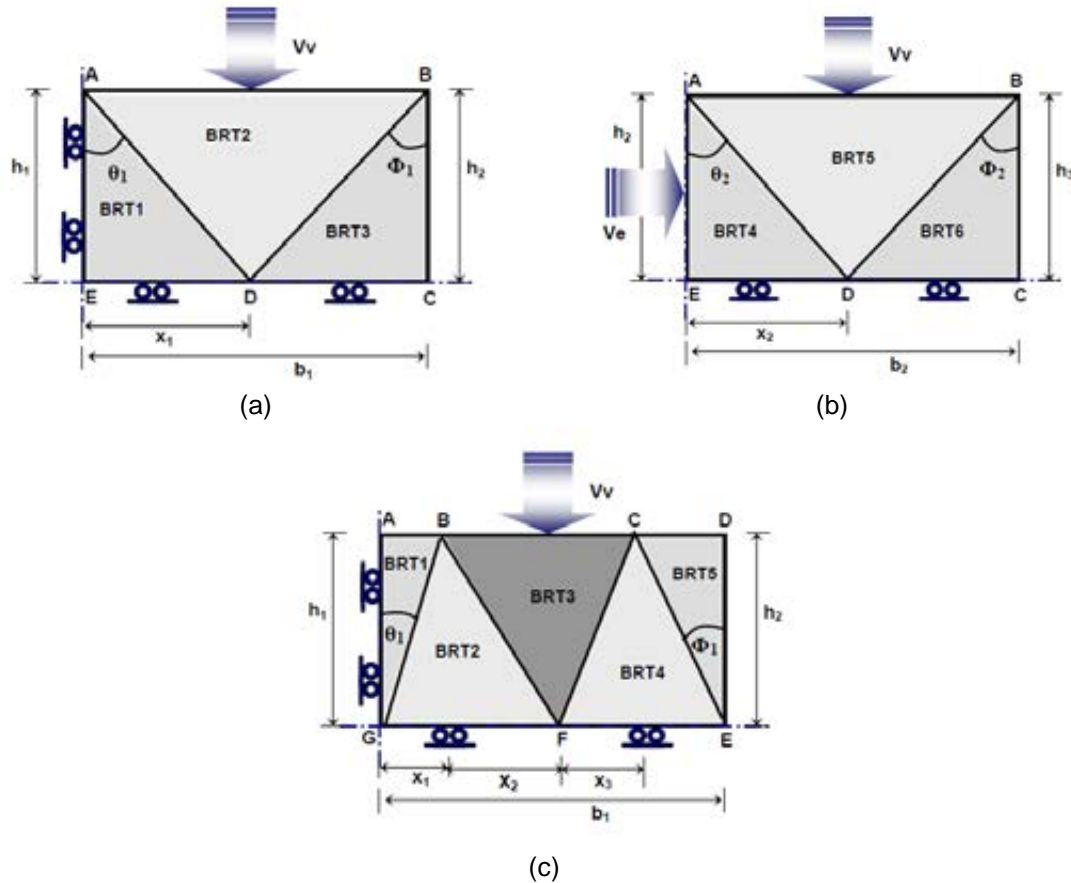


Figura 4.4: Comparativa entre la aplicación del TLS bajo su consideración modular (a,b) y no modular (c) [5]

Para una misma pieza, las ecuaciones obtenidas para el caso modular (Ec. 4.5 y Ec. 4.6), siento este de 6 BRT, son mucho más simples, que la ecuación que arroja el modelo no modular (Ec. 4.7), incluso contando con un número menos de BRT.

El número de módulos que se introducirán para analizar el proceso de conformado dependerá del tipo de análisis que se pretenda realizar y del nivel de optimización. En este mismo capítulo se presentará dicho estudio de optimización de módulos.

En la Figura 4.5 se aprecia la diferencia entre el tratamiento modular y no modular para un mismo problema de indentación

Además, tratándose de un proceso de indentación, en el que el material que se pretende deformar es mayor que la matriz o punzón que ejercerá la carga, cabe precisar que mediante la subdivisión modular se puede realizar un análisis más preciso de las zonas del material que se encuentran en contacto con el punzón y de aquellas que no se encuentran bajo la influencia directa de la carga. Conjuntamente, cabe destacar que la principal ventaja del modelo modular es la posibilidad de trabajar módulo a módulo, pudiendo apartar el resto de la pieza bajo estudio, lo que simplifica enormemente el análisis final.

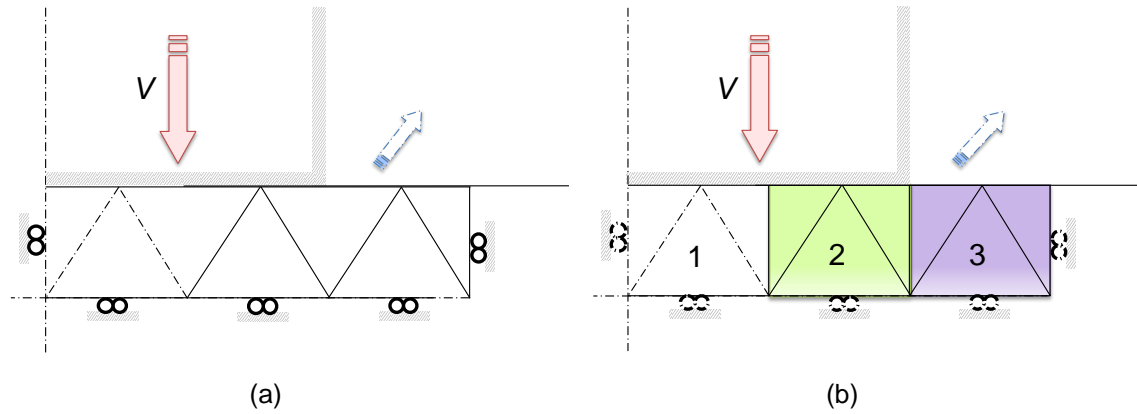


Figura 4.5: Diferencia entre el tratamiento no modular (a) y modular (b)

A la hora de analizar el planteamiento modular, se procederá de forma similar al protocolo de resolución aplicado al formato no modular, pero, como se ha comentado anteriormente, obteniendo una solución más sencilla. Se plantean las ecuaciones pertinentes, con ayuda de los hodógrafos correspondientes, con el objetivo de resolver la relación  $p/2k$  de cada módulo, siendo  $p$  el esfuerzo o carga y  $k$  el límite de fluencia a cortadura del material. Finalmente, una vez obtenidas las relaciones  $p/2k$  de cada uno de ellos, se determina una media ponderada para obtener el  $p/2k$  total.

Siguiendo el planteamiento ofrecido en la Figura 4.5, la relación final quedaría de la siguiente forma:

$$\left(\frac{p}{2k}\right)_T = \frac{\left(\frac{p}{2k}\right)_1 \cdot b_1 + \left(\frac{p}{2k}\right)_2 \cdot b_2 + \left(\frac{p}{2k}\right)_3 \cdot b_3}{b_1 + b_2 + b_3} \quad \text{Ec. 4.7}$$

Correspondiendo  $b_1$ ,  $b_2$  y  $b_3$  a las bases de los módulos 1, 2 y 3 respectivamente.

En los siguientes apartados de este capítulo se explicará, paso a paso, la resolución del proceso de indentación mediante el modelo modular, así como la evolución que ha tenido a lo largo del desarrollo de los modelos y los distintos tratamientos otorgados al punzón y el material, desde las primeras propuestas de partida hasta las finalmente aplicadas en esta Tesis Doctoral.

### 4.3 Esquema del procedimiento

En primer lugar, antes de comenzar el análisis y la aplicación del TLS mediante BRT bajo el enfoque modular, es necesario realizar una serie de clasificaciones de la pieza a analizar, ya que, según el espesor de la pieza que se esté conformando, se podrá tratar de un proceso de deformación u otro. Así, por ejemplo, cuando se considera una pieza de espesor reducido, posiblemente se asemeje más a un proceso de conformado de chapa que a un proceso de forja por indentación. Se podría entender como una extralimitación del estudio pero, en los siguientes apartados, se demostrará que el modelo modular planteado ofrecerá buenos resultados aunque se estén conformando espesores reducidos.

En la Figura 4.6 se muestra la clasificación de las dos tipologías de piezas sobre las que se diferenciará el proceso de análisis, especificando cual es el rango de espesores adaptado en cada clasificación.

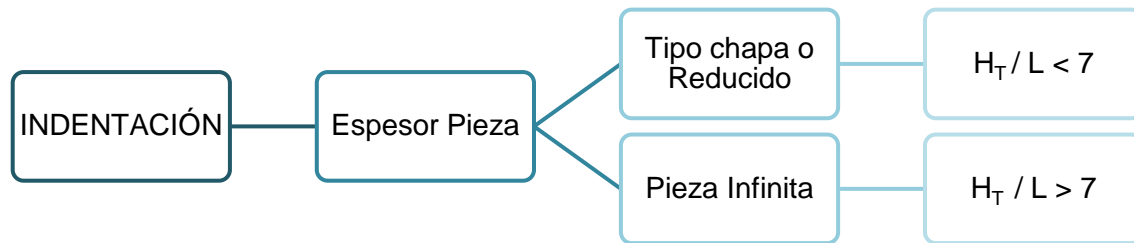


Figura 4.6: Clasificación del tipo de pieza según espesores

Además de la clasificación por espesores, es necesario ilustrar el análisis llevado a cabo para el estudio de las piezas sometidas a un proceso de forja por indentación, atendiendo a las características de cada proceso de indentación analizado, tales como la geometría del punzón utilizado, la tipología de rozamiento considerada y la curva de comportamiento asumida para el material que se conforma

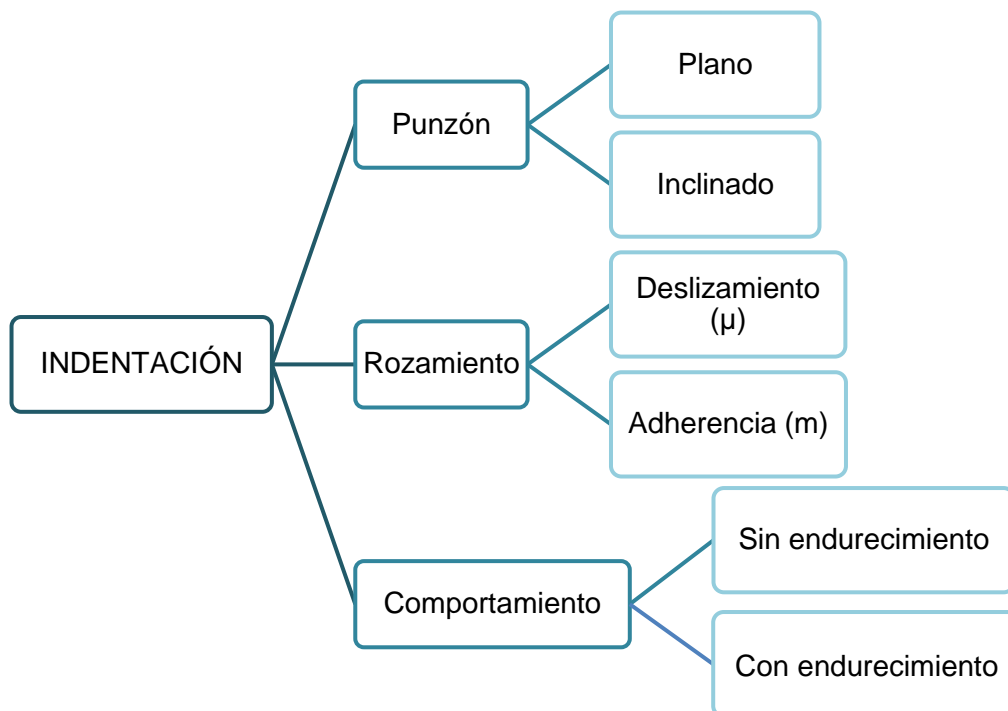


Figura 4.7: Clasificación de las tipologías de estudios realizados

En la Figura 4.7 se muestran las distintas alternativas analizadas según la diferente casuística que se puede mostrar en cada proceso de indentación. Así, aunque el análisis esté abierto a más posibilidades, finalmente se presentará el

estudio para uno de los casos generales, como puede ser una pieza indentada con un punzón plano, sometida a rozamiento por adherencia y analizando la influencia del endurecimiento en dicho estudio.

#### 4.4 Construcción del hodógrafo

Un hodógrafo es una representación gráfica de los vectores relativos a la velocidad de un cuerpo o fluido. La posición de cualquier dato representado en dicho diagrama es proporcional a la velocidad del movimiento representado.

El hodógrafo también es denominado diagrama de velocidades, siendo William Rowan Hamilton, en 1846, quien prácticamente desarrolló este método de análisis de velocidades para expresar, mediante lenguaje simbólico, la ley de atracción Newtoniana y el problema matemático relativo a la determinación de las órbitas y perturbaciones de los cuerpos cuyos movimientos son gobernados por esta ley [15].

No obstante, en la aplicación del TLS los hodógrafos se desarrollan para conocer el campo de velocidades concerniente a cada BRT, ya que, como se ha expresado en apartados anteriores, en cada BRT las partículas se mueven al unísono en la misma dirección y sentido, tratándose, por lo tanto, como un solo bloque.

A continuación, para el completo entendimiento del proceso de análisis, se procede a expresar las diferentes fases de construcción de un hodógrafo genérico, para un campo de velocidades dado. Para ello, se ilustrará un cuarto de una pieza sometida a un proceso de forja, que se hallará dividida en tres BRT, tal como la que se ilustra en la Figura 4.8.

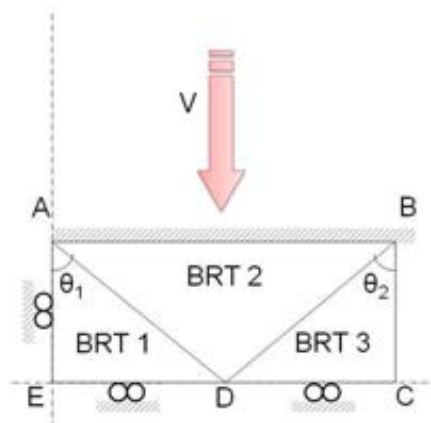


Figura 4.8: Campo genérico de discontinuidad de velocidades

- 1- La construcción del hodógrafo se inicia trazando la velocidad de aplicación  $V$  de la carga (velocidad de la platbanda superior), que en este caso resulta ser vertical (Figura 4.9 a). Ésta actúa sobre la superficie que se opone a la deformación, la superficie AB. El BRT1 se encuentra contiguo a la condición de simetría vertical y por tanto no tendrá posibilidad de desplazamiento, siendo por tanto su velocidad nula.

- 2- A continuación, se traza una línea paralela a la superficie de discontinuidad AD, correspondiente al desplazamiento relativo entre los dos bloques adyacentes BRT1 y BRT2, y otra paralela a la superficie superior del módulo BRT2, AB, consecuencia de la necesidad de cumplir la condición de contorno de contacto de dicho bloque con la platabanda superior. De esta forma se cierra el primer triángulo de velocidades y se hallan tanto la velocidad relativa entre los bloques iniciales, denotada por  $V_{12}$ , como la velocidad absoluta del bloque BRT2, denotada por  $V_2$  (Figura 4.9 b).
- 3- Para terminar el hodógrafo, se vuelve a trazar una línea paralela a la superficie de discontinuidad DB, correspondientes al contacto entre los bloques adyacentes BRT2 y BRT3, y otra a la superficie DC, consecuencia de respetar la condición de contorno del plano de simetría vertical, por haber considerado un cuarto de pieza, volviendo a determinar los valores relativos de la velocidad relativa existente entre los bloques finales, denotada por  $V_{23}$ , y la absoluta del bloque BRT3, denotada por  $V_3$  (Figura 4.9 c).

Una vez conocido el desarrollo del hodógrafo, en el siguiente capítulo se procederá al análisis del conformado plástico mediante el proceso de indentación de una pieza según las clasificaciones anteriormente referidas según el espesor de las piezas deformadas (Figura 4.6) y según el estudio realizado (Figura 4.7).

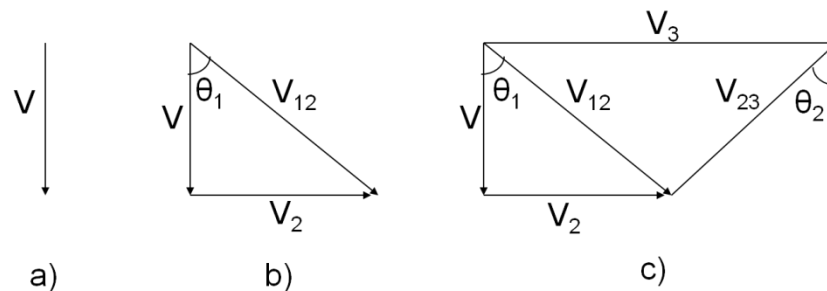


Figura 4.9: Fases de creación de un hodógrafo genérico

## 4.5 Rozamiento considerado

A la hora de considerar el rozamiento de la pieza, hay que plantear qué tipo de rozamiento se puede hallar en un problema de indentación. Una vez establecidas las condiciones de contorno, es más sencillo identificar, de forma teórica, el rozamiento existente entre la pieza y el punzón.

El coeficiente de rozamiento, por otra parte, puede corresponder a dos tipologías diferentes, a saber: el rozamiento por adherencia ( $m$ ) y rozamiento por deslizamiento ( $\mu$ ).

### 4.5.1 Rozamiento externo (punzón-pieza)

Ambos tipos de rozamientos, aplicados en cada caso al área de interés estudiada, dependerán del área de contacto existente entre ambos objetos. El área

real aumenta cuando aumenta la presión. Esto es debido a que, a nivel microscópico, ninguna superficie es totalmente lisa, sino que está formada por diversas hendiduras y salientes, tal como se aprecia en la Figura 4.10. Los salientes de ambas superficies que entran en contacto, son los que determinan donde se estará produciendo el rozamiento, siendo estos una pequeña porción del área aparente. El área real de contacto aumenta cuando aumenta la presión ya que los picos se van deformando (Figura 4.10). La deformación de estos picos o salientes se producirá, principalmente, en el material más blando, acomodándose a la geometría del que presenta más resistencia. Cuando el material desliza, las soldaduras en frío (Figura 4.10) se van rompiendo y rehaciendo constantemente.

De forma general, cuando se tiene aplicada una carga reducida (lo que podría referirse a los momentos previos en el proceso de indentación estudiado), el rozamiento mayor será  $\mu$ , ya que existirá poca superficie en contacto y  $m$  será menor. Cuando esa carga aumente (lo que ocurre desde los primeros instantes del proceso),  $m$  irá aumentando hasta superar a  $\mu$ .

El coeficiente de fricción  $m$ , funciona mejor para los contactos producidos bajo altas presiones [16]. En los procesos de deformación plástica en metales, la presión que se produce entre las superficies en contacto puede alcanzar múltiplos del límite elástico, por lo que la relación lineal entre la  $\tau$  y  $p$  puede no resultar válida para altas presiones, ya que  $\tau$  no puede exceder  $k$  [17]. Por lo tanto, para evitar las limitaciones del modelo de Coulomb, se trabaja con el modelo de rozamiento por adherencia,  $m$ .

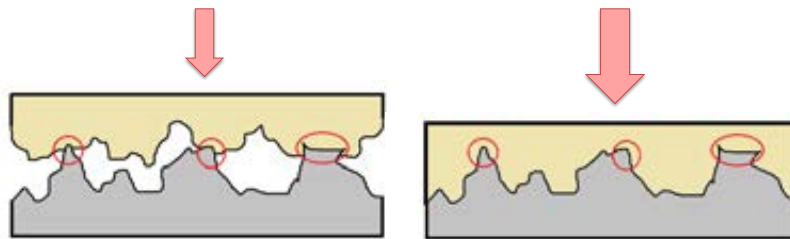


Figura 4.10: Cambios en la superficie ante la aplicación de cargas elevadas.

En los procesos de indentación, el material está sometido a deformaciones muy altas. Estas presiones otorgan cierta relevancia a  $m$  sobre  $\mu$ . Tanto es así que, una vez realizados los estudios necesarios, se concluye que el rozamiento por deslizamiento no es relevante en este proceso de deformación, en comparación con la implicación que pueda tener  $m$ .

#### 4.5.2 Rozamiento interno (pieza-pieza)

Con la intención matemática de agrupar la ecuación para la resolución del Teorema del Límite Superior en un único término, internamente se asociará el movimiento de los bloques triangulares con un  $m$  unitario cuando exista material colindante a la porción de material estudiado.

$$p \cdot V \cdot l \cdot w = \sum_{i=1}^{n_s} V_i \cdot l_i \cdot m_i \cdot k \cdot w + \sum_{i=1}^{n_s} V_i \cdot l_i \cdot k \cdot w \quad \text{Ec. 4.8}$$

Agrupando los dos sumandos de la forma mostrada en el párrafo anterior (Ec. 4.8, siendo  $n_s$  el número de superficies de discontinuidad [18]), se llega a la Ec. 4.9, siendo en ambas ecuaciones  $l$  la longitud de la superficie de discontinuidad en el plano estudiado,  $V$  la velocidad del material en la discontinuidad,  $k$  el límite de tensión a cortadura del material,  $m$  el rozamiento mencionado,  $w$  la profundidad de la pieza estudiada y  $p$  la presión necesaria para realizar la deformación.

$$p \cdot V \cdot l \cdot w = k \cdot w \cdot V \sum_{i=1}^{n_s} l_i \cdot m_i \quad \text{Ec. 4.9}$$

Debido a la configuración de la pieza de estudio, se ha dividido a su vez este rozamiento interno considerado para el planteamiento matemático. De esta forma, se debe diferenciar entre piezas pequeñas (finitas) y piezas grandes (infinitas). En la Figura 4.11 se muestra un ejemplo de pieza pequeña, en la que existen diferentes condiciones de contorno para el rozamiento. Así, se distingue entre  $m_1$  (verde), correspondiente a la condición de contorno presente en la simetría representada,  $m_2$  (rojo) presente en las discontinuidades de cada BRT, y  $m_3$  (amarillo) a la condición de contorno entre el módulo exterior considerado y el resto de material colindante.  $m$  corresponde al rozamiento presente entre la matriz o punzón y el material deformado.

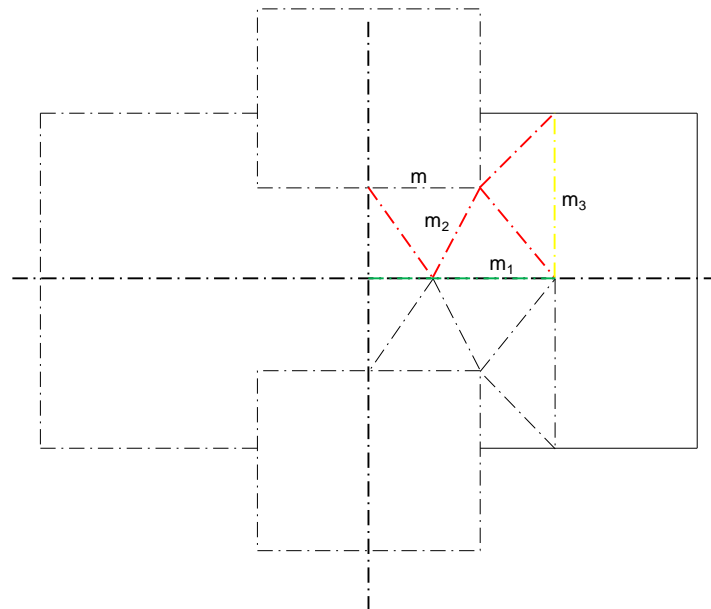


Figura 4.11: Ejemplo de pieza pequeña.

Para los coeficientes de rozamiento por adherencia  $m_2$  y  $m_3$ , el valor que les corresponde será igual a la unidad. En efecto, un valor de  $m_2$  distinto a uno representaría una discontinuidad en la pieza, ya que el material estaría separándose



en torno a las líneas de discontinuidad del los BRT, sin embargo, en este proceso y bajo estas condiciones, ese comportamiento no tiene lugar. Existe, por tanto, una adherencia completa interna en todo momento.

En la zona que delimita el BRT de la zona vertical existe rozamiento con otro material de la pieza que no está sometido a las mismas velocidades de fluencia de la zona estudiada, por lo tanto, y de igual modo que en el párrafo anterior, si se otorga un coeficiente de rozamiento  $m_3$  distinto de uno, se estaría considerando una separación o rotura del material.

En cuanto al rozamiento  $m_1$ , en el caso de la doble simetría mostrada en la figura anterior,  $m_1 = 0$ , ya que los BRT que están en contacto se moverán de la misma forma, es decir, a la misma velocidad y en la misma dirección, por lo que pueden considerarse ambos bloques como un solo bloque rígido. Si la altura de la pieza es grande (Figura 4.12), entonces la doble simetría no tendría lugar ya que los BRT tendrían una distorsión considerable y se podría llegar a falsear los resultados.

Si dicha doble simetría no existiera, entonces se tendría que tratar este rozamiento como los anteriores y, por tanto,  $m_1 = m_2 = m_3 = 1$ . Por lo tanto:

- Doble simetría:  $m_1 = 0$ ,  $m_2 = m_3 = 1$
- Simetría vertical:  $m_1 = m_2 = m_3 = 1$

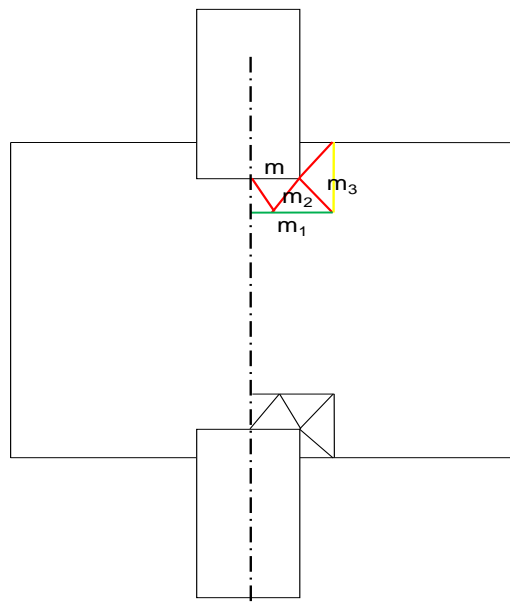


Figura 4.12: Ejemplo de pieza grande

#### 4.5.3 Tratamiento general

A nivel interno, se trabajará de acuerdo a las leyes de Tresca ( $mk$ ), ya que se entiende que a este nivel siempre se tratará de una adherencia completa, estado en el que las leyes de Coulomb ( $\mu p$ ) no se cumplen. Es decir, no existe separación o rotura

del material, sino que éste se considera rígido-plástico perfecto, por lo que su fluencia no incurrirá en ninguna desigualdad ni mostrará separación alguna.

A nivel externo, refiriéndose éste al rozamiento existente entre el punzón y la pieza, se podrá trabajar tanto con rozamiento por adherencia (Tresca) como por deslizamiento (Coulomb) dependiendo de la presión que se esté aplicando y el instante que se esté analizando. Centrando el interés sobre procesos de conformado como la indentación, resulta más interesante trabajar suponiendo un rozamiento por adherencia ( $m$ ) ya que, conforme aumenta la presión en la deformación,  $m$  presentará valores mayores que  $\mu$ , siendo  $m$  el principal factor a tener en cuenta.

Gracias al modelo modular se pueden realizar estudios de rozamiento mostrando la mejor combinación entre rozamiento y módulos y obteniendo unos resultados acordes con todos los anteriores.

#### 4.6 Evolución del modelo

Debido a la complejidad del estudio de la aplicación del TLS mediante BRT a un proceso de indentación, el modelo inicial estudiado [19] se ha visto sometido a cambios conforme ha sido adaptado a mejoras sucesivas. Existe, por tanto, para el completo entendimiento del modelo finalmente adoptado, la necesidad de mostrar dicha evolución y la comparación de los sucesivos modelos desarrollados, exponiendo la conclusión alcanzada tras la elección del modelo más favorable en el análisis del proceso de forja por indentación.

Se han plasmado diversos modelos que han sido estudiados rigurosamente con el fin de conseguir la mejor adaptación posible del método del TLS. Siguiendo la línea de progreso, el propio modelo ha ido evolucionando siempre de acuerdo a los resultados obtenidos, con el fin de conseguir una optimización y un estudio en profundidad del caso de estudio de la presente Tesis Doctoral.

A continuación se muestra el desarrollo de dicha variación y se exponen los razonamientos que han ido inclinando el estudio hacia la realización de los cambios pertinentes en cada caso.

##### 4.6.1 Planteamiento 1: Modelo de partida.

Se parte de la base de los estudios realizados por el Dr. Martín en su Tesis Doctoral sobre la aplicación del Teorema del Límite Superior a procesos de forja libre [5], en la que se aplicaban módulos formados por tres BRT según la geometría de la pieza estudiada. En el caso inicial sometido a estudio, el material presenta un flujo ascendente vertical en los extremos, propiciado por el menor tamaño del punzón sobre la pieza, por lo que en el material se asume un desplazamiento vertical sobre el punzón, como se aprecia en la Figura 4.13.

El conflicto de este modelo radica en la continuidad de ambos módulos, señalada también en la Figura 4.13. Mediante esta unión, se impone al módulo B a una condición de contorno doble. Por un lado, en la zona inferior (BTR 3), en

contacto con el módulo A y recibiendo una velocidad de entrada correspondiente a la velocidad de salida del módulo A y, por otro lado, en la zona superior (BRT 6), que no recibe ningún empuje lateral pero en el que sí existe cierto rozamiento con el punzón.

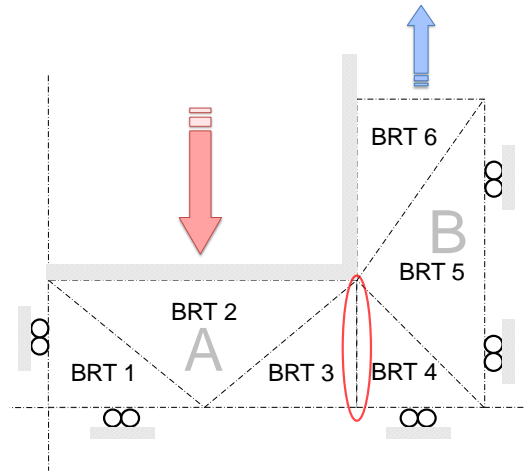


Figura 4.13: Modelo inicial de indentación y ubicación del conflicto

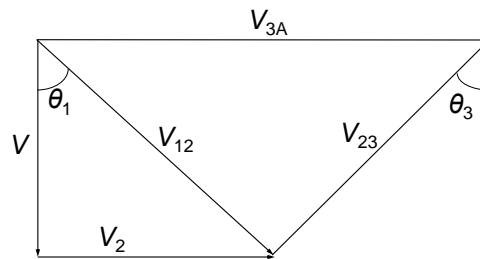


Figura 4.14: Hodógrafo módulo A

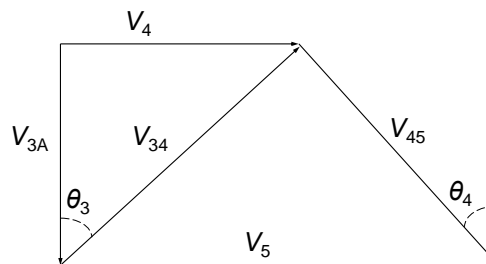


Figura 4.15: Hodógrafo módulo B

En esta zona, que no recibe empuje del módulo anterior, se debe tener una consideración matemática especial a la hora de plantear las ecuaciones de velocidades oportunas. Por tanto, realizando el estudio de los correspondientes hodógrafos mostrados en la Figura 4.14 y 4.15, se tiene la Ec. 4.10 de la velocidad 5.

Físicamente, la expresión  $V_{34} \tan \theta_4$  no tiene sentido, al no estar recibiendo esta zona del módulo el empuje de la  $V_{34}$ , por lo que se considera nula (Ec. 4.11).

$$V_5 = V_{3A}(tg\theta_3 + tg\theta_4) = V_{3A}tg\theta_3 + V_{3A}tg\theta_4 \quad \text{Ec. 4.10}$$

$$V_{3A}tg\theta_4 = 0 \quad \text{Ec. 4.11}$$

Por lo tanto:

$$V_5 = V_{3A}tg\theta_3 \quad \text{Ec. 4.12}$$

Esta consideración matemática se tendrá en cuenta, tanto para el modelo Modular como para el No Modular, a la hora de realizar los cálculos y comparativas pertinentes.

Debido a esta diferencia en el contorno del módulo B, se opta por variar el modelo e intentar evitar la incompatibilidad existente.

#### 4.6.2 Planteamiento 2

Para sortear la discontinuidad anterior y obtener una configuración que permitiera realizar el correspondiente hodógrafo, se planteó incorporar un módulo de 2 BRT. Este módulo, compuesto por 2 BRT, recibe el nombre de módulo Ad-hoc ya que, hasta el momento, se había trabajado únicamente con módulos de 3 BRT.

Es en el análisis de este planteamiento cuando se crean los módulos de BRT formados únicamente por 2 BRT, quedando el modelo como se muestra en la Figura 4.16.

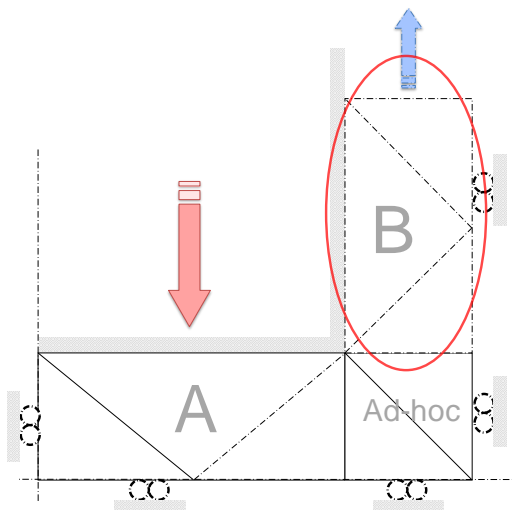


Figura 4.16: Planteamiento 2 y zona de conflicto

Como era de esperar, el hodógrafo del módulo B, mostrado en la Figura 4.18, se simplifica hasta el extremo de no tener velocidad relativa. Absolutamente todo el material asciende, por lo que sólo existirán velocidades absolutas y todas tendrán

el mismo valor. El hodógrafo correspondiente a los dos primeros módulos coinciden con los de la Figura 4.14, ya que éste no ha cambiado, siendo el tercero el de la Figura 4.17.

En este caso, al comprobar los resultados, el módulo B, contrariamente al buen comportamiento mostrado en el caso anterior, se observó que arrojaba valores menores a la unidad, valores que, por tanto, no pueden considerarse como aceptables, aunque el comportamiento es mucho más ventajoso al realizar la media ponderada para representar los valores totales de la relación  $p/2k$ , ya que la integración del módulo a los resultados finales desvirtúa la realidad, como se aprecia en la Figura 4.19 y 4.20.

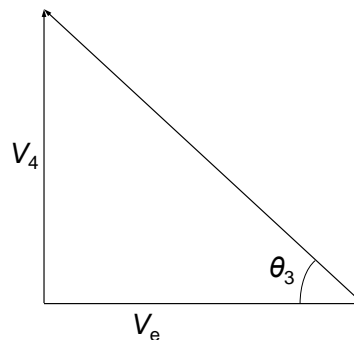


Figura 4.17: Hodógrafo módulo Ad-hoc

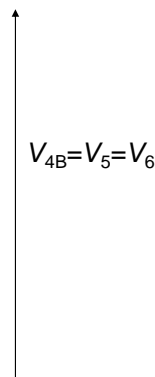


Figura 4.18: Hodógrafo módulo B

Este comportamiento es debido a que el módulo B no sufre una deformación plástica como tal. El punzón no actúa sobre él, no comprime el material. Éste, simplemente, recibe el flujo/empuje del módulo anterior (Ad-hoc) y todo el material que lo compone asciende verticalmente. Es un comportamiento similar al otorgado al cordón de rebaba producido en el conformado, en los estudios de forja.

Aunque, en el caso de la indentación, el módulo vertical comporta cierto rozamiento, el valor que aporta ese rozamiento al resultado total es mínimo y puede ser despreciado.

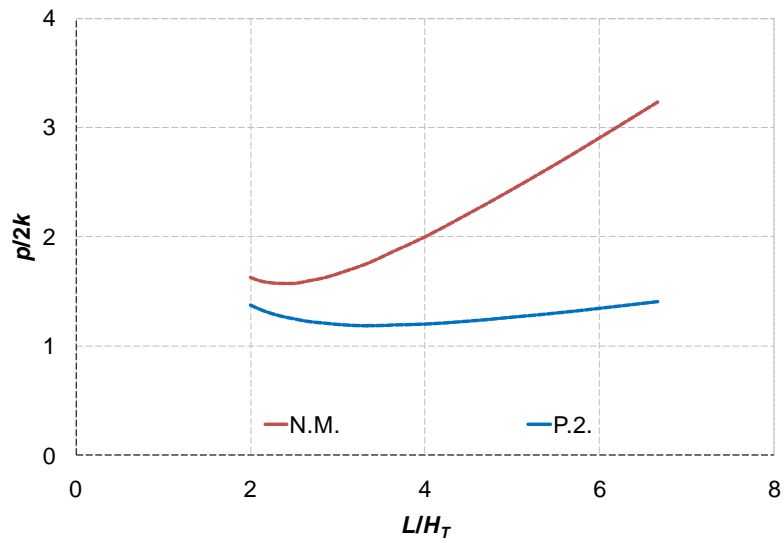


Figura 4.19: Comparativa  $p/2k$  para  $m$  mínima

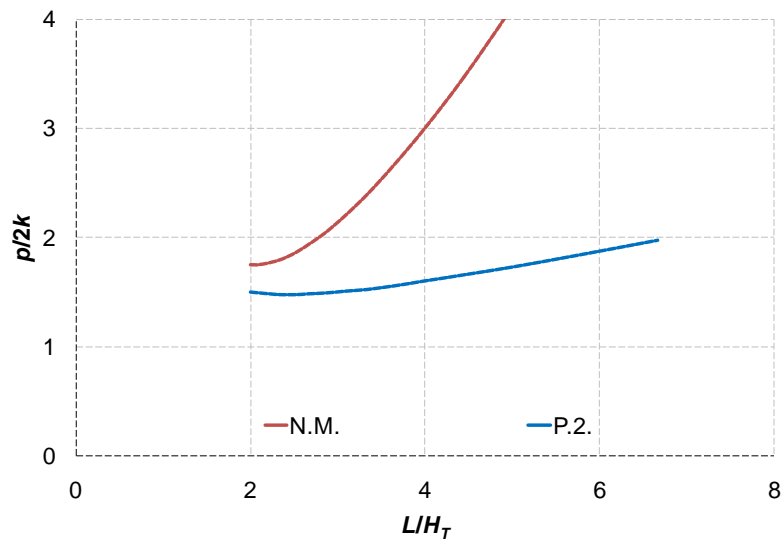


Figura 4.20: Comparativa  $p/2k$  Modular y No Modular para  $m$  máxima.

#### 4.6.3 Planteamiento 3

Debido a la problemática de los valores  $p/2k$  menores a la unidad, relativos al módulo B del planteamiento 2 (Figura 4.16), se propone un nuevo modelo prescindiendo de este ambiguo último módulo, realizando únicamente el estudio de la zona horizontal del material. Se puede desechar el módulo vertical y, por tanto, obviar el material de esta zona ya que, con el estudio anterior queda demostrado que la interacción con el conjunto es mínima y puede ser apartado del análisis, dando lugar al planteamiento 3 (Figura 4.21).

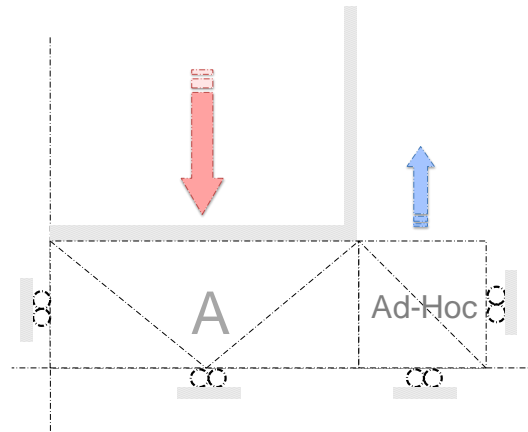


Figura 4.21: Planteamiento 3

Aunque en este planteamiento, los resultados son similares a los del modelo No Modular, se sigue manteniendo y mejorando la ventaja principal del modelo Modular: la sencilla resolución de las ecuaciones.

Con la intención de obtener una diferenciación significativa en los resultados de este modelo con los del No Modular, se sigue trabajando con el modelo y, tras distintas simulaciones y análisis de las mismas, se toma la decisión de trabajar únicamente con módulos de sólo 2 BRT, dado que son mucho más versátiles y sencillos.

#### 4.6.4 Planteamiento 4

En la Figura 4.22 se muestra una configuración mucho más simple que la anterior, reduciendo cuantiosamente los cálculos a la hora de encontrar la relación adecuada de la relación adimensional  $p/2k$ . Manteniendo el módulo Ad-hoc, se divide el anterior en dos módulos de 2 BRT cada uno.

La problemática que arrojaba este modelo se debía al empeoramiento de los resultados a la hora de enfrentarlos al modelo No Modular, como se aprecia en el Figura 4.23.

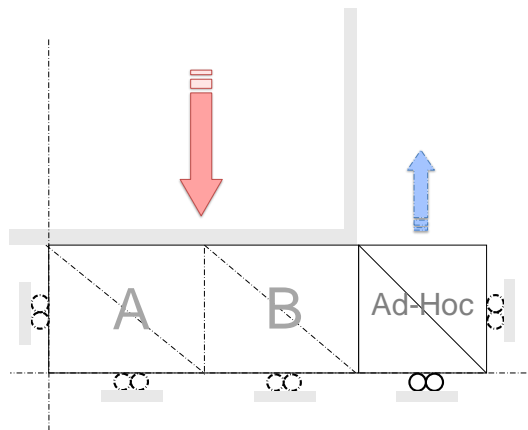


Figura 4.22: Planteamiento 4

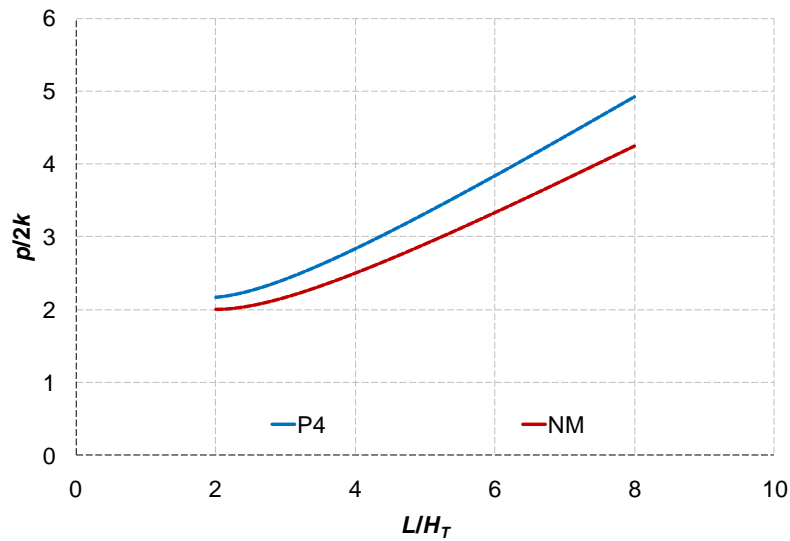


Figura 4.23: Comparativa Planteamiento 4 Vs No Modular para m máxima

Gracias al trabajo con módulos independientes, asociados entre ellos a través de las velocidades de entrada y salida, se pueden presentar diferentes configuraciones hasta obtener la más adecuada.

#### 4.6.5 Planteamiento 5

Confiando en la simplicidad del modelo anterior y aspirando a mantener dicha facilidad de resolución, se modifica la orientación (Figura 4.24) de los dos primeros módulos, obteniendo resultados óptimos y mejorados tanto frente al modelo anterior como al modelo No Modular (Figura 4.25). La diferencia principal radica en que en este caso se toma menos superficie de contacto afectada por el rozamiento, debido al movimiento de los BRT.

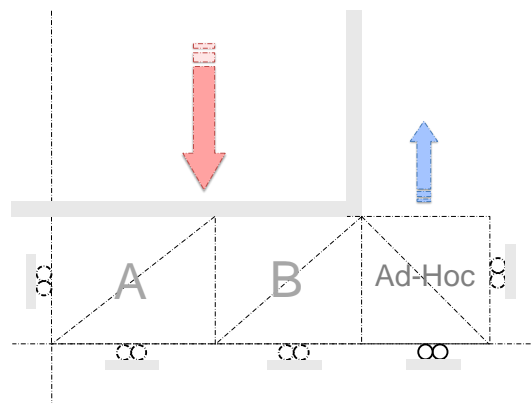


Figura 4.24: Planteamiento 5



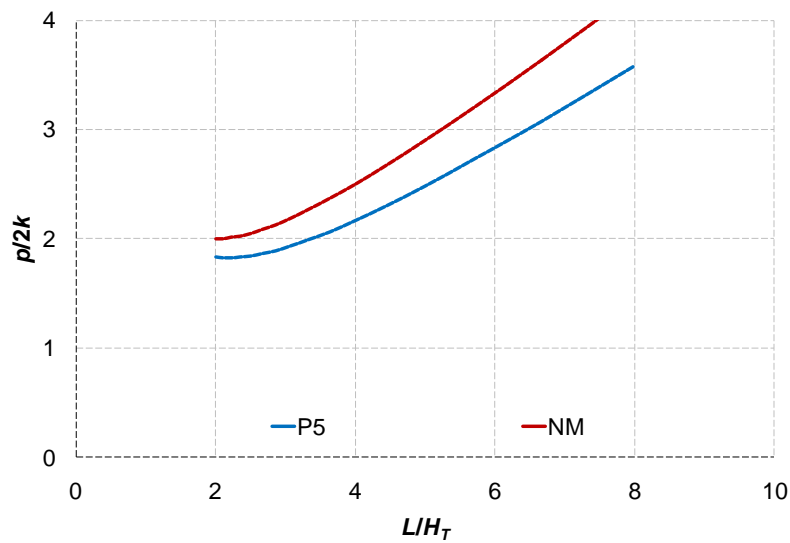


Figura 4.25: Comparativa Planteamiento 5 Vs No Modular para m máxima

Esta comparativa se lleva a cabo enfrentando el modelo Modular resultante del planteamiento 5 y el modelo No Modular arrastrado desde el planteamiento 2 (Figura 4.26), que ofrece mejores resultados que su análogo al planteamiento 5, mostrado en la Figura 4.27, como se aprecia en el Figura 4.28.

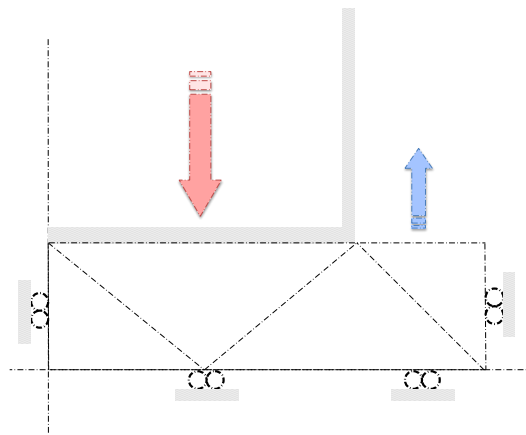


Figura 4.26: Modelo No Modular inicial

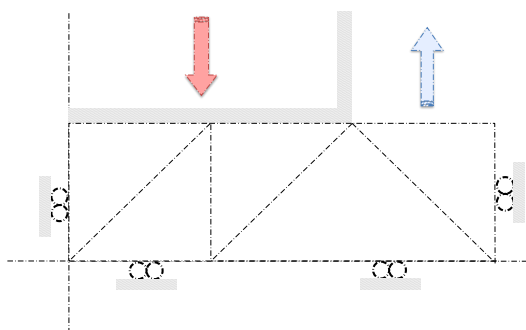


Figura 4.27: Modelo No Modular homólogo al planteamiento 5

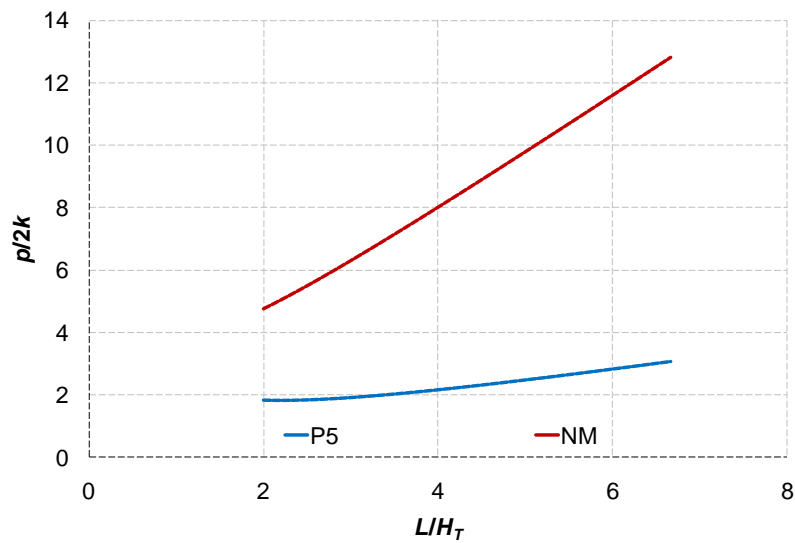


Figura 4.28: Resultados P.5 frente al No Modular análogo para  $m$  máxima

Con la intención de no dejar ninguna configuración de lado, y para optimizar y buscar la solución más adecuada al proceso, se estudia también el planteamiento 5 pero con el módulo Ad-hoc en sentido inverso, mostrado en la Figura 4.29.

Curiosamente, con esta configuración, los resultados arrojados vuelven a ser iguales a los del modelo no modular y por tanto se desestima.

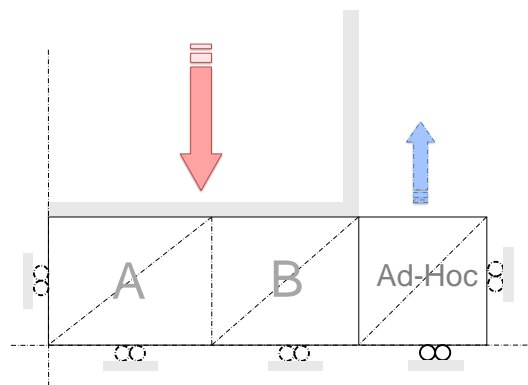


Figura 4.29: Planteamiento 5.1

#### 4.6.6 Piezas de espesor intermedio

Asemejándose más a un proceso de forja por indentación y siguiendo la clasificación de piezas según Hosford y Caddell [18] se encuentran las piezas de tamaño intermedio, en las que se centrará el apartado presente.

Una vez alejado el espesor de la pieza de lo que podría considerarse un tratamiento de conformado de chapa, será necesario plantear la necesidad de realizar

un estudio del material situado bajo el considerado modelo de tratamiento modular, que se identifica con la zona coloreada de naranja que se muestra en la Figura 4.30.

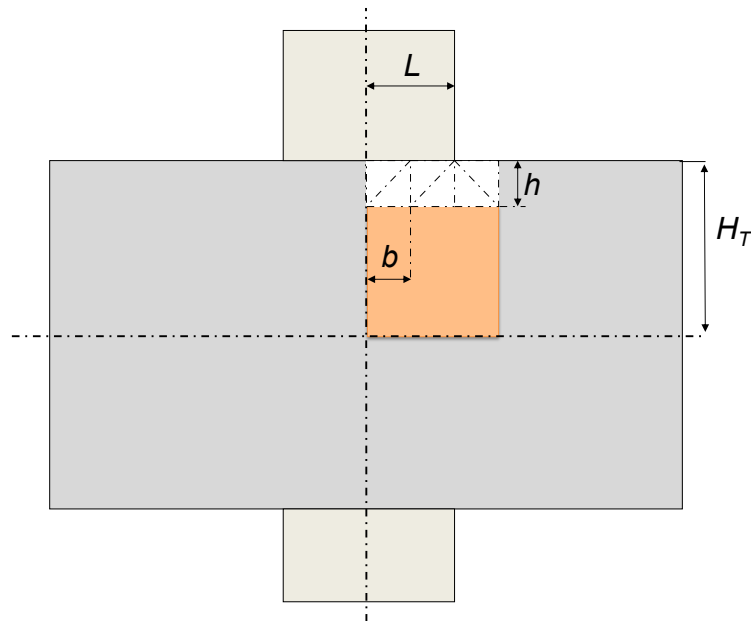


Figura 4.30: Configuración pieza tamaño intermedio

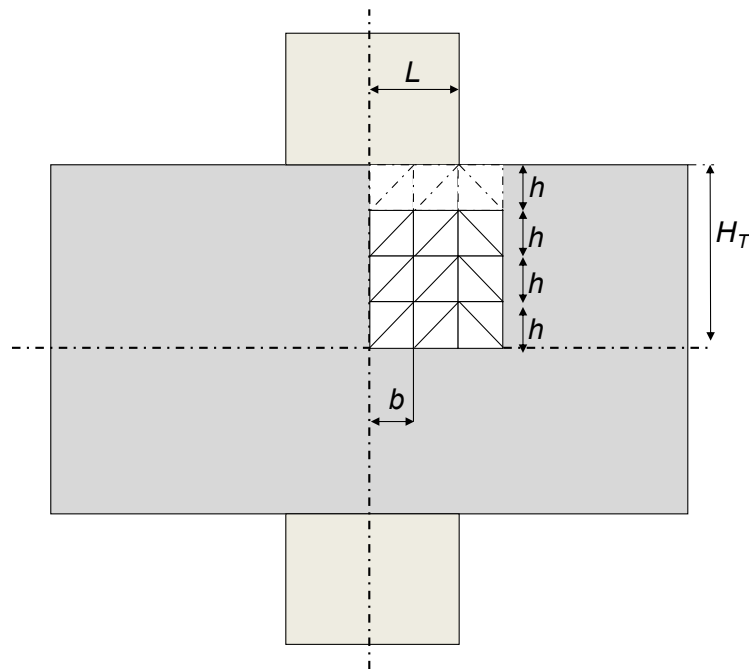


Figura 4.31: Tratamiento multicapa pieza mediana

Hosford y Caddell limitan el tratamiento de espesor intermedio a un factor de forma, correspondiente a  $H_T/L$ , con un valor de 8.75, ya que a partir de ese factor de forma, la relación de  $p/2k$  supera el valor de  $1+\pi/2$ , sobrepasando así el valor del planteamiento que establecen para una pieza de espesor infinito. Con la intención de realizar una comparativa con los resultados mostrados en [18], se mantendrá la

correspondencia del factor de forma, siendo en este caso  $H_T/L$  y no  $L/H_T$ , como se ha mostrado hasta ahora y en estudios anteriores [5].

En este caso, se realizará un estudio para localizar a partir de qué espesor será más oportuno trabajar con el tratamiento intermedio o no.

Siguiendo estudios tales como [20-22], que abordan el análisis de diferentes capas de material, se plantea una adaptación modular mediante filas de módulos, como se aprecia en la Figura 4.31. Se tendría así un tratamiento multicapa de la pieza a conformar.

Curiosamente, el planteamiento de los hodógrafos correspondientes no se ve dificultado por la adición de filas gracias a la configuración del planteamiento seleccionado para llevar a cabo el estudio modular. De esta forma, las filas colindantes recibirán el empuje vertical del punzón y el desarrollo de la deformación seguirá la misma forma que en los hodógrafos planteados anteriormente.

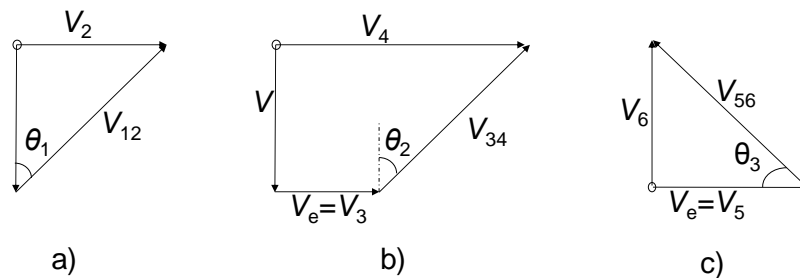


Figura 4.32: Configuración hodógrafos según columna

En la Figura 4.32 se muestran los hodógrafos correspondientes a cada columna de módulos de la Figura 4.31, siendo a) la primera columna empezando desde la línea de simetría vertical.

Será necesario identificar las condiciones de contorno (C.C.) de cada fila, ya que estas no serán iguales a las consideradas hasta el momento.

Se distinguen tres condiciones de contorno distintas:

- 1- C.C. 1: Correspondiente a la primera fila que se encuentra en contacto con el punzón y que contiene otra fila bajo ella.
- 2- C.C. 2: Correspondiente a las filas situadas en el centro del estudio, que contienen siempre una fila encima y debajo.
- 3- C.C. 3: Correspondiente a la última fila, situada en la línea de simetría horizontal, que contiene una fila encima y la línea de simetría bajo ella.

Una vez localizados los tres casos presentes, se procede a establecer las diferencias en cada caso:

- 1- C.C. 1: Al ser la única fila en contacto con el punzón, los dos primeros módulos verán incorporados el rozamiento por adherencia ( $m$ ), según corresponda. Además  $m_1=m_2=m_3=1$  (Figura 4.33).
- 2- C.C. 2: No presentarán rozamiento por adherencia ya que no está en contacto directo con el punzón y la distribución de rozamientos internos será la que se aprecia en la Figura 4.34, siendo  $m_1=m_2=m_3=1$ .
- 3- C.C. 3: Esta fila tampoco verá incorporado el rozamiento por adherencia, al no estar nunca en contacto con el punzón. La distribución de rozamientos internos se presenta en la Figura 4.35, siendo éstos  $m_1=m_2=m_3=1$  y  $m'_1=0$  por encontrarse en la línea de simetría.

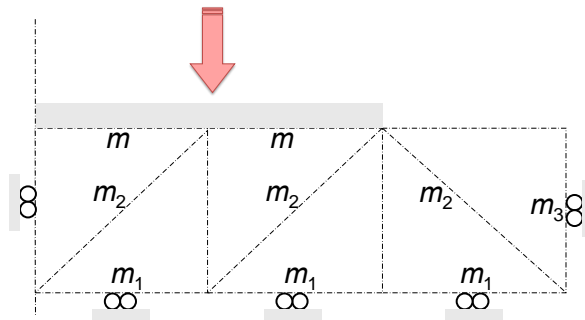


Figura 4.33: C.C. 1

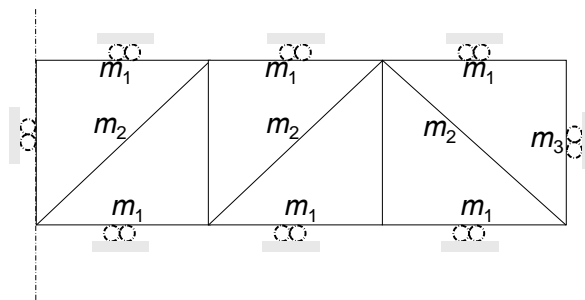


Figura 4.34: C.C. 2

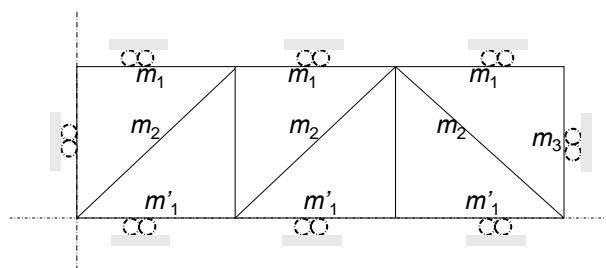


Figura 4.35: C.C. 3

Este tratamiento por capas presenta unos resultados con valores muy elevados. Estos valores de  $p/2k$ , que se obtenían para la totalidad, son demasiado elevados para poder realizar ninguna comparativa con los otros modelos, llegando a tener resultados de  $p/2k$  del orden de 80 y 90.

Como solución se realiza una media con todos los valores  $p/2k$  de cada fila, llegando así a resultados concordantes con los obtenidos hasta el momento con los otros casos y estudios [22].

Ahora bien, el tratamiento posible para este estudio discernía según la aproximación con la que se afrontase. Por tanto, se dividirá según estudios y deformaciones posibles:

#### 4.6.6.1 Estudios y Deformaciones

En primer lugar se distinguirá entre tres posibles planteamientos o estudios, tal como se muestra en la Figura 4.36. Así, se tendrá un modelo formado por tres módulos en cada fila (a), un segundo modelo formado por tres módulos en la primera fila y dos en las siguientes (b) y un último modelo formado sólo por dos módulos en cada fila (c)

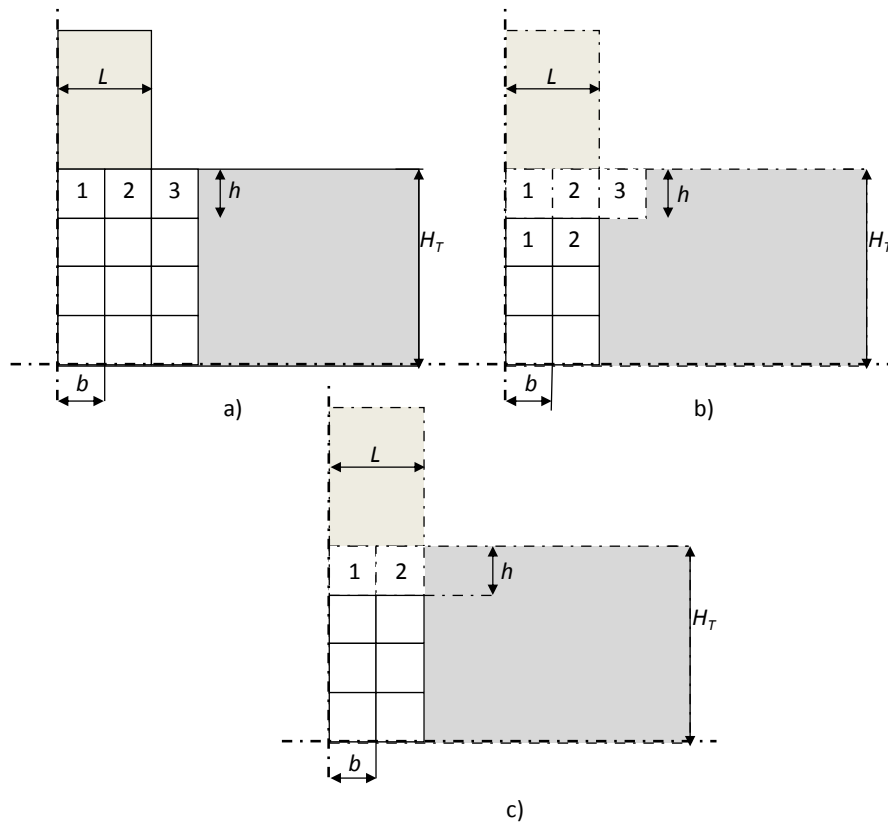


Figura 4.36: Disposición de módulos según el Estudio

El estudio correspondiente a la Figura 4.36, b) será descartado ya que no sigue una evolución lógica en cuanto a la evolución física del modelo. Sería complicado establecer una relación entre el módulo 3 de la fila superior con la parte inferior del material. Por tanto, será necesario únicamente realizar comparativas entre el estudio a) y c) para descartar el que ofrezca valores de  $p/2k$  totales mayores.

Según se opte por el estudio a) o c), la altura óptima ( $h_{op}$ ) alcanza un valor diferente: para estudio a)  $h_{op}=1,7$ , mientras que para c)  $h_{op}=1$ . Dado que la altura

óptima es la que arroja menor valor de  $p/2k$  durante el proceso, se realizan comparativas tanto para la altura óptima del estudio a) como para la del c).

Ahora bien, en cuanto a proceso de deformación, también es posible distinguir entre tres acercamientos distintos:

- 1- *Def. 1:* Todas las filas se van deformando conjuntamente y de igual forma, hasta que se llega a cierta altura de fila en la que los valores de  $p/2k$  se disparan. Se ha concretado dicha  $h$  en 0.40. Cuando esto sucede, se calcula la altura total de la pieza que se tiene en ese instante (por ejemplo, si se tienen 10 filas,  $10 \cdot 0.40 = 4$ ) y se vuelve a recalcular el número de filas necesarias. El inconveniente es que se produce un salto de filas considerable, que se reflejará en las gráficas (Figura 4.37 y A4.40).

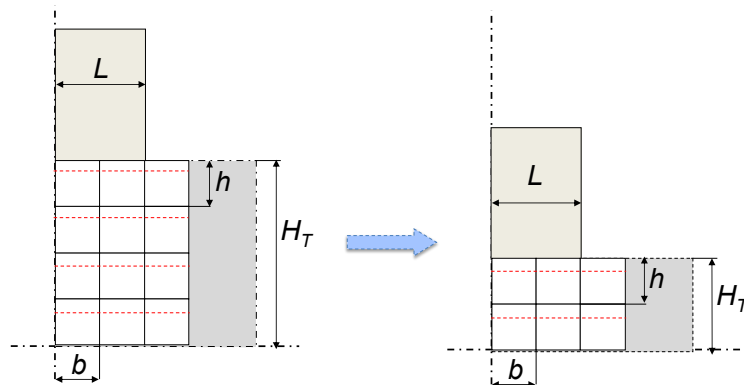


Figura 4.37: Configuración Deformación 1

- 2- *Def.2:* Sólo irá deformándose la fila en contacto con el punzón, hasta que se llega a la  $h$  crítica (0.40) y desaparece, dando paso a la deformación de la siguiente fila. De esta forma el salto de filas es de uno en uno (Figura 4.38).

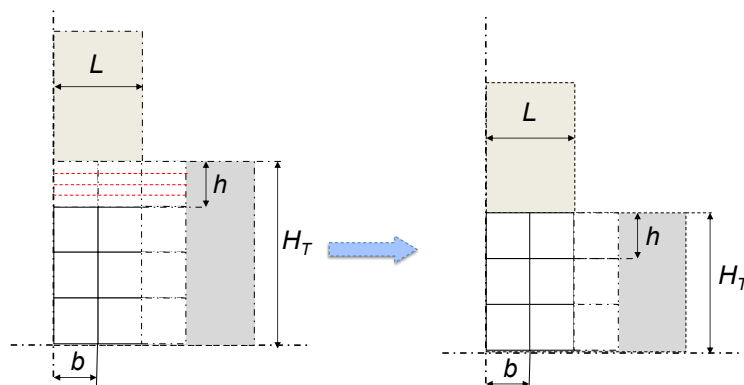


Figura 4.38: Configuración Deformación 2

- 3- *Def.3:* Consiste en una composición de las dos anteriores. Todas las filas se irán deformando conjuntamente pero sólo se permitirá el descenso de una en

una. Es decir, se calcula cuándo la deformación equivale a la desaparición de una sola fila, eliminándose una fila únicamente (Figura 4.39).

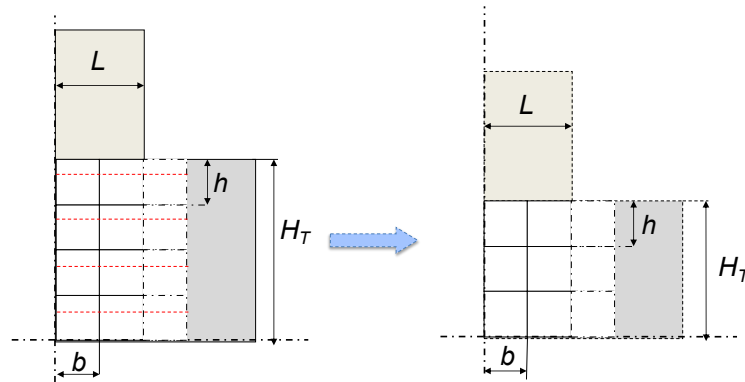


Figura 4.39: Configuración Deformación 3

Una vez realizado el análisis para los tres procesos de deformación, se decide eliminar la tipología de Deformación 1, por corresponder a un proceso de deformación demasiado brusco, presentando unas gráficas con unos saltos desproporcionadamente grandes frente a los arrojados por los otros dos modelos de deformación (4.40).

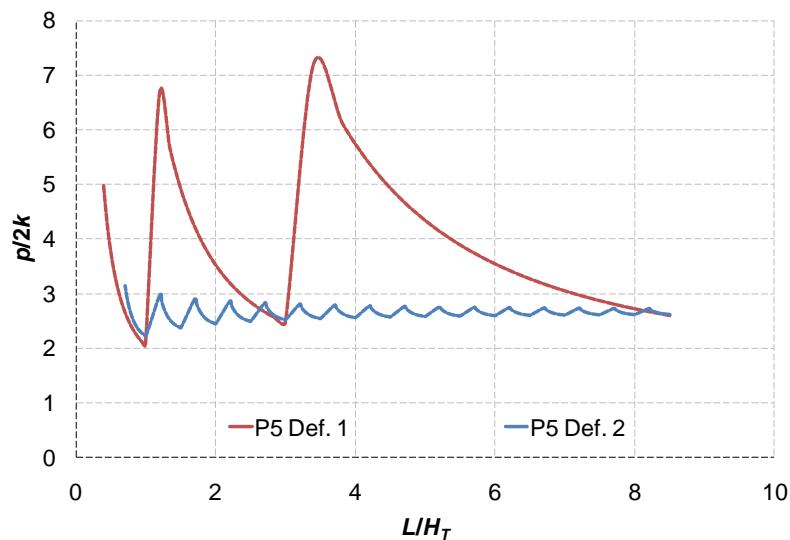


Figura 4.40: Comparativa evolución resultados Def. 1 y 2

Comparando el estudio a) y c), tanto con modelo de deformación 2 y 3, el que presenta mejores resultados es el estudio c) correspondiente a filas de dos módulos cada una (Figura 4.41 y 4.42).



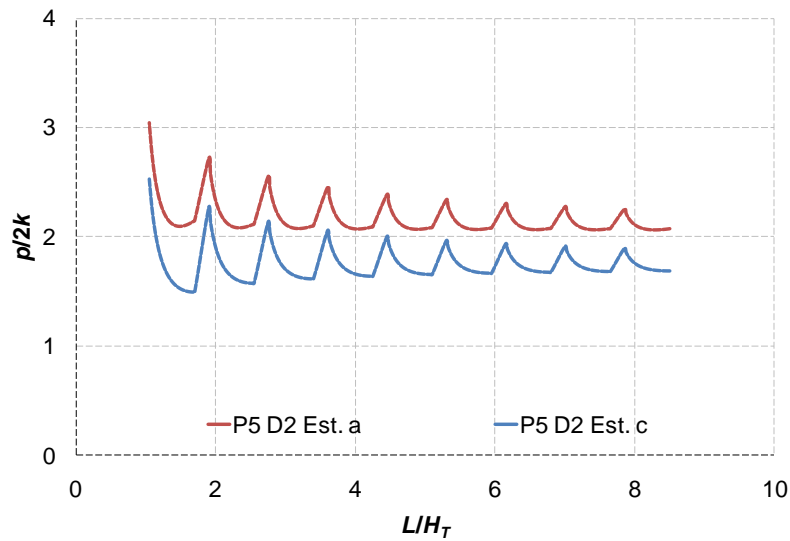


Figura 4.41: Comparativa Estudios con modelo Def. 2

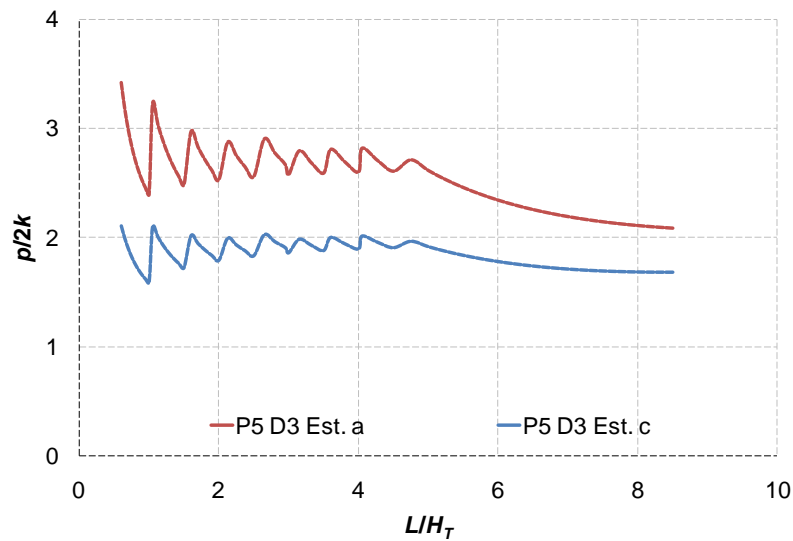


Figura 4.42: Comparativa Estudios con modelo Def. 3

Y por último, la elección del modelo de deformación adecuado se realiza de la misma forma, mediante una comparación de los resultados finales, resultando que el que mejores valores ofrece es el modelo de deformación 3 (Figura 4.43). Por tanto, se aplicaría el modelo referente al Planteamiento 5, con el Estudio c y la Deformación 3 (P5D3Ec).

Con la intención de asemejar el gráfico a los obtenidos hasta el momento, sin que presenten esa serie de saltos debidos a la eliminación de las filas consecutivamente, se filtra de modo que sólo se presenten los valores picos mayores, quedando el gráfico de la siguiente forma (Figura 4.44):

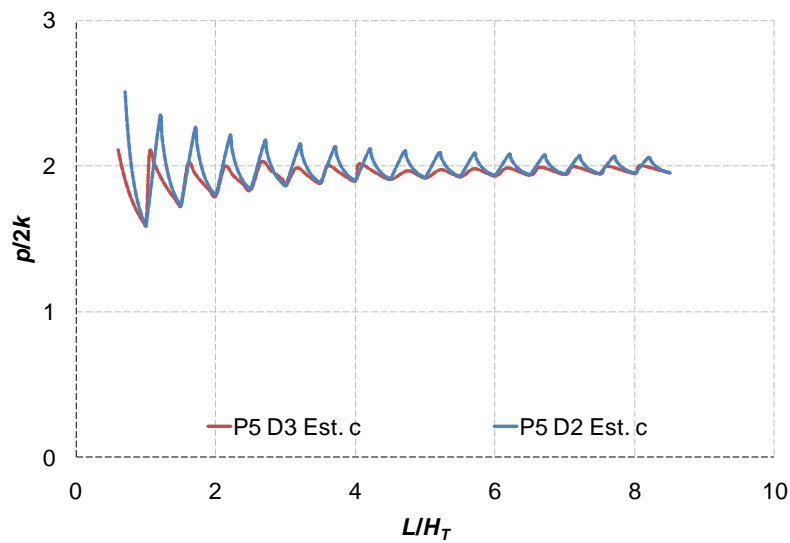


Figura 4.43: Comparativa entre Deformación 2 y 3

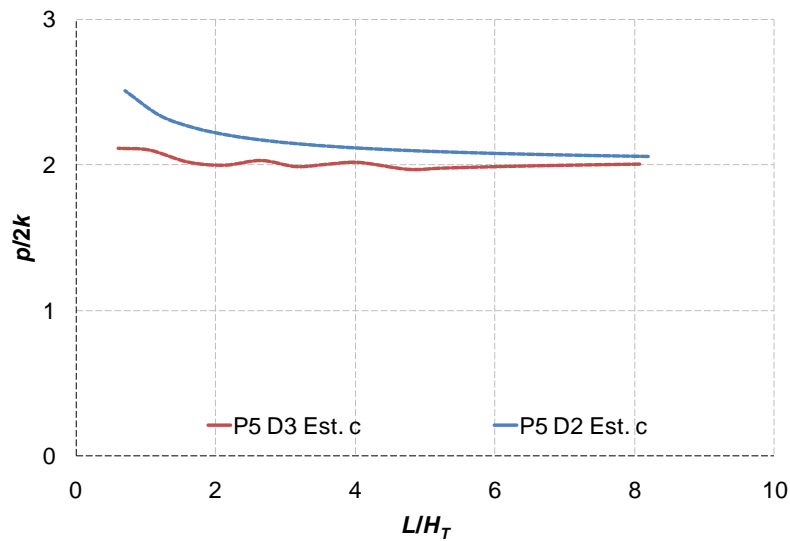


Figura 4.44: Representación de valores máximos

Pudiéndose realizar la comparación de una forma más clara.

Ahora bien, debido a que los resultados no arrojan una diferenciación significativa entre los estudios de las piezas tipo chapa y las piezas que se consideran dentro del rango de infinitas, ni aportan información relevante del comportamiento sufrido en la deformación, siendo un estudio que generaría dificultad al método que se plantea en la presente Tesis Doctoral, se decide incluir las piezas intermedias dentro del rango de las piezas que se consideran de espesor reducido o piezas tipo chapa, con las consideraciones oportunas descritas en los apartados relativos.

#### 4.6.7 Planteamiento 5 optimizado

Una vez establecido el modelo a seguir en la aplicación del TLS mediante BRT, se procede a la optimización del modelo para seguir mejorando los valores de  $p/2k$  obtenidos.

La optimización del modelo se realiza variando el número de módulos con los que se trabaja. En el siguiente gráfico se muestran los valores relativos al aumento de módulos, desde 3 a 7:

En la Figura 4.45 se aprecia como la mejora de resultados se produciría a partir de una relación de  $L/H_T$  inferior a 4 y que ésta no aportaría una reducción significativa en los resultados en comparación con el nivel de dificultad que se añadiría a la resolución de las ecuaciones ya que, cuanto mayor es el número de módulos, mayor es la complejidad del problema a resolver. Por tanto, la adición de módulos con el fin de optimizar el modelo, no aportaría una mejora sustancial al proceso y, por tanto, no se llevará a cabo.

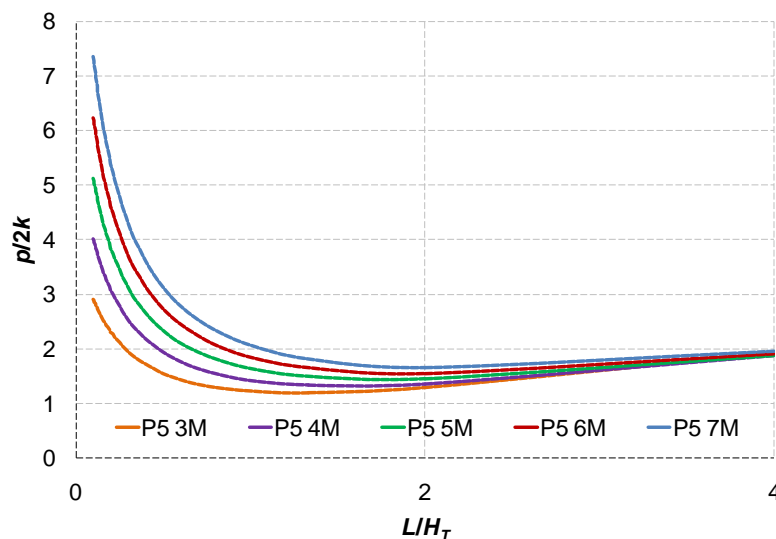


Figura 4.45: Optimización Planteamiento 5

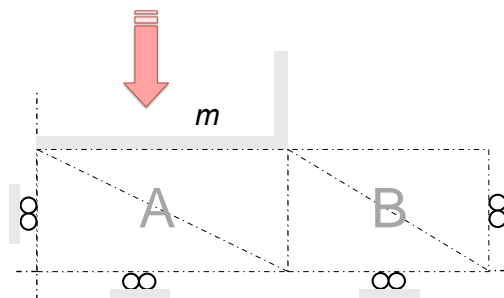


Figura 4.46: Optimización Planteamiento 5

Por último, se plantea el caso contrario, que supondría trabajar únicamente con dos módulos. Para esto, será necesario cambiar de dirección el módulo situado bajo el punzón para poder tener en consideración el rozamiento entre el punzón y la pieza a deformar, tal como se aprecia en la Figura 4.46, lo que asimilaría el modelo al Planteamiento 4 anterior.

Con esta configuración sí se produce una mejora relevante en los resultados, como se contempla en la Figura 1.35:

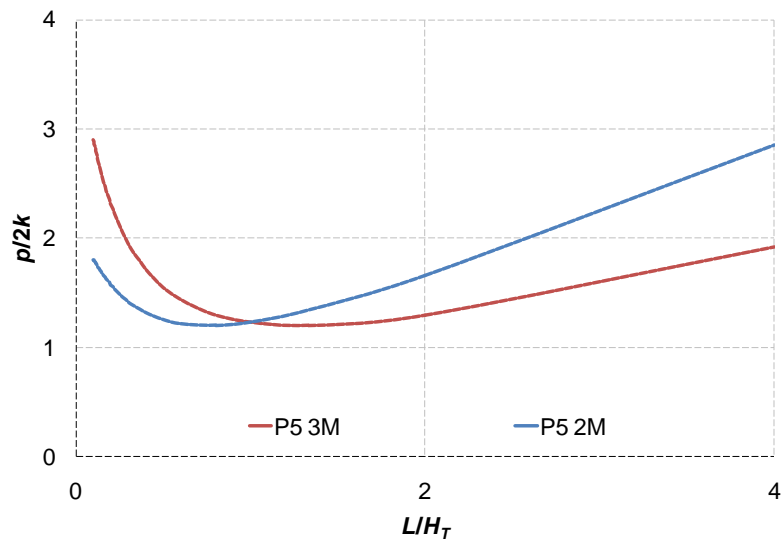


Figura 4.47: P5 con 2 y 3 módulos

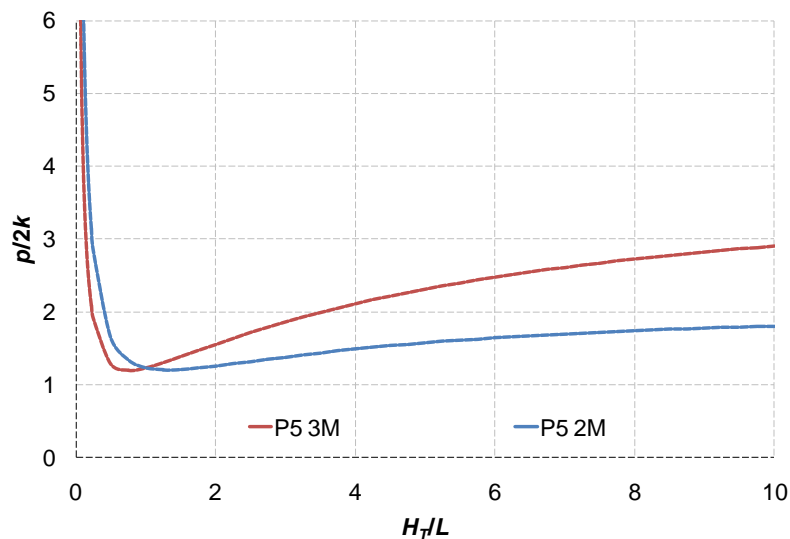


Figura 4.48: Cambio  $L/H_T$  a  $H_T/L$

Para representar gráficamente el proceso de indentación, de forma que se aprecie mejor la evolución de los esfuerzos conforme el punzón va introduciéndose en la pieza a deformar y la altura de esta disminuye, y con el fin de poder realizar fácilmente una comparación con los resultados obtenidos de otros métodos tanto analíticos (como el Campo de Líneas de Deslizamiento, CLD), como numéricos (como el Método de Elementos Finitos, MEF), será necesario adoptar otra representación para los ejes, concretamente para el eje de abscisas, en el que se mostrarán los valores de  $p/2k$  en función de la relación  $H_T/L$  (Figura 4.48).

Esta representación será la adoptada en adelante para continuar con el estudio del proceso de indentación en sus diferentes vertientes.

Debido a que el cruce entre el modelo con 3 módulos y con 2 módulos se produce a partir de una relación  $H_T/L$  bastante reducida, y que la mejora de los resultados no es significativa en comparación con la dificultad que se añadiría efectuando ese cambio de ecuaciones, se decide trabajar con el modelo P5 optimizado a dos módulos.

#### 4.6.8 Planteamiento 6

Llegados a este punto en los análisis, contando con un modelo que ofrece valores de  $p/2k$  menores al modelo No Modular, se replantea el modelo para intentar adaptarlo, en la medida de lo posible, al proceso de deformación que tiene lugar. Se decide pues estudiar de una forma más cercana el material que queda libre en las cercanías del punzón y se define un nuevo planteamiento.

Según los modelos de deformación obtenidos mediante la aplicación de elementos finitos utilizados a través del programa Deform 2D/3D, el modelo presenta la evolución mostrada en la Figura 4.49 para piezas de espesor mínimo.

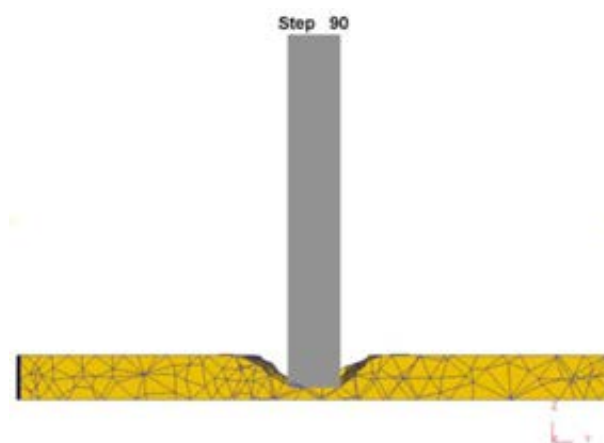


Figura 4.49: Captura pantalla proceso deformación Deform3D

Por tanto, el modelo de estudio que se adecúa a la presente forma se muestra en la Figura 4.50. El material que queda a la derecha del módulo C se verá desplazado como material rígido, sin influir en el módulo anterior. Y el módulo C

presentará una inclinación que dependerá del material desalojado conforme avance el punzón.

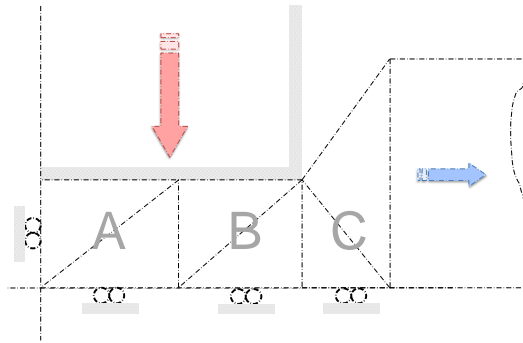


Figura 4.50: Planteamiento 6

Se diferencia del planteamiento 5 en que el módulo que analiza el material que no está bajo el punzón seguirá la inclinación que se va produciendo. Además, se incorpora una evolución de este módulo con el tiempo. En un primer instante no existirá y se comenzará a analizar este sector conforme el punzón avance en la deformación, es decir, cuando exista material desplazado en esa zona que pueda influir en la tensión final.

El estudio de la inclinación es más complejo que el resto de los módulos y por tanto necesita una consideración a parte.

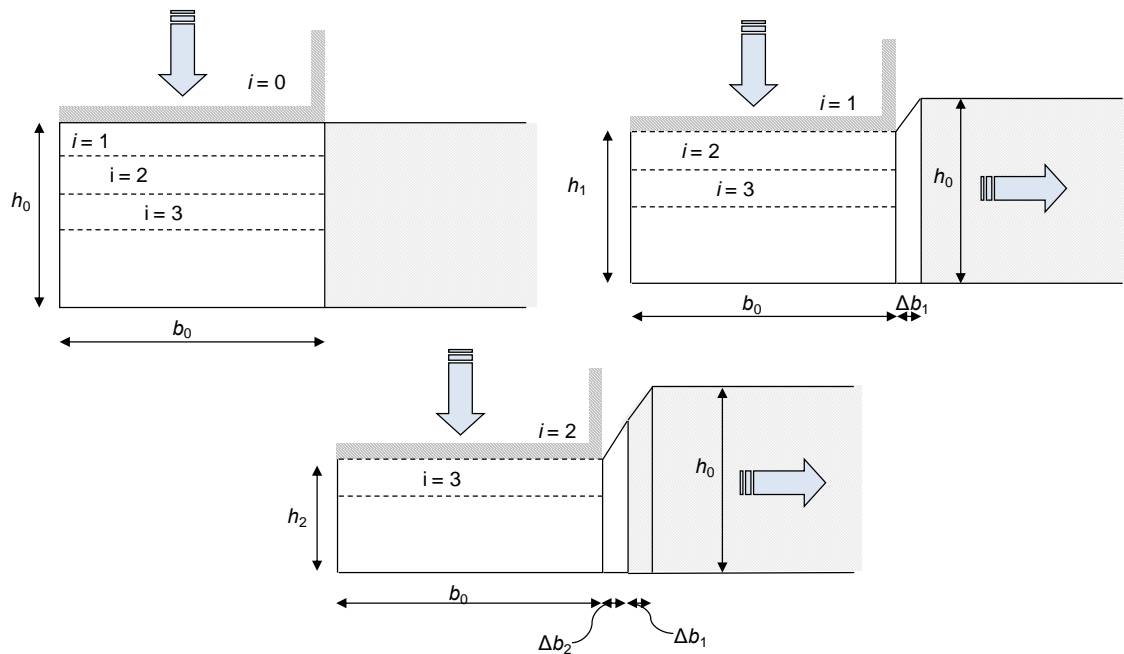


Figura 4.51: Evolución inclinación Planteamiento 6

Como se aprecia en la Figura 4.51, en un primer instante ( $i=1$ ), el punzón desciende y el material se ve evacuado hacia la derecha, creando una nueva sección de material de base  $\Delta b_1$ , desplazando a su vez el material colindante que será tratado

como sólido rígido. La nueva sección de material estará relacionada con el área perteneciente al instante 1, ya que debe satisfacer la condición de volumen constante del material. Por tanto:

$$A_0 = b_0 \cdot h_0 \quad \text{Ec. 4.13}$$

$$A_1 = b_0 \cdot h_1 + \Delta b_1 \cdot h_1 + \frac{1}{2} \cdot \Delta b_1 \cdot \Delta h_1 \quad \text{Ec. 4.14}$$

Y sabiendo que  $A_0 = A_1$ , entonces:

$$\Delta b_1 = \frac{b_0 \cdot \Delta h}{h_1 + \frac{1}{2} \cdot \Delta h} \quad \text{Ec. 4.15}$$

De la misma forma, se obtiene  $\Delta b_2$ :

$$\Delta b_2 = \frac{b_0 \cdot \Delta h}{h_2 + \frac{1}{2} \cdot \Delta h} \quad \text{Ec. 4.16}$$

Para continuar el análisis de la deformación, se considerará la siguiente expresión generalizada para la base del módulo exterior: Por tanto, para  $i=n$ :

$$\Delta b_n = \frac{b_0 \cdot \Delta h}{h_n + \frac{1}{2} \cdot \Delta h} \quad \text{Ec. 4.17}$$

Por consiguiente, a la hora de realizar el estudio del módulo correspondiente con esa sección, es decir, el módulo exterior (C), se tendrá en cuenta que su base vendrá dada por la Ec. 4.17

En cada instante, el punzón desciende un poco más y sigue presionando y evacuando el material hacia la derecha. Ya que el estudio modular se centra en el estudio de instantes, cada vez se creará un nuevo módulo con una base distinta de la anterior, siendo el anterior módulo que ocupaba su lugar desplazado con el resto del material y considerado a su vez como rígido-plástico perfecto.

Teniendo descritos de antemano los módulos que forman parte del ancho del punzón, el estudio sólo se centrará en la actuación del tercer módulo o módulo libre. Para este, existen dos orientaciones posibles, como se muestra en la Figura 4.52, siendo la más adecuada la segunda opción (b). Se observa que, al igual que en planteamiento anterior, esta orientación para el módulo que queda libre es la que ofrece mejores valores de  $p/2k$ .

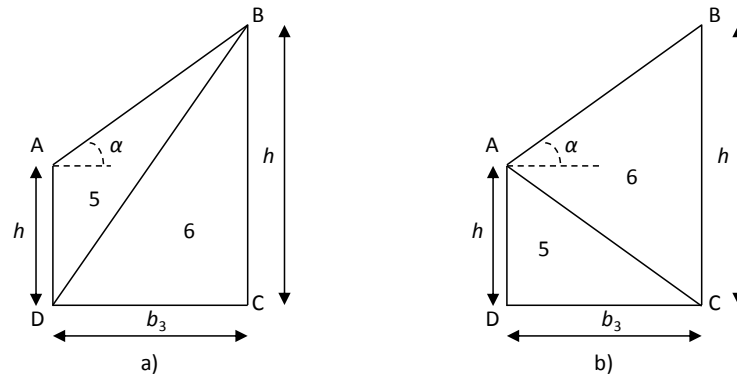


Figura 4.52: Módulo libre Planteamiento 6

Si, como se ha comentado anteriormente, la base 3 va creciendo y no se va sumando a la anterior, sólo se está analizando la deformación que se acaba de producir. Considerando el anterior módulo como parte de la zona rígida, se obtienen los resultados mostrados en la Tabla 4.1.

Debido al tratamiento, en el primer momento o instante cero, ese módulo no existe, por lo que su base será cero. Como este módulo no llega a ver crecida su base lo necesario, los valores de  $p/2k$  para este módulo son altos, aunque al realizar la media ponderada, por tener una base desproporcionadamente pequeña, estos valores no aportarán información al resultado final.

Tabla 4.1: Resultados de  $p/2k$  en relación a la base 3

$b_3$ [mm]	$p/2k$ C
0,051	19,028
0,052	18,067
0,053	17,130
0,055	16,218
0,056	15,331
0,058	14,470
0,060	13,633
0,062	12,822
0,063	12,036
0,066	11,275
0,068	10,539
0,070	9,828
0,073	9,142
0,075	8,481
0,078	7,846
0,082	7,236
0,085	6,652
0,089	6,093



Se puede advertir que el análisis adquiere un grado de complejidad mayor en comparación con el planteamiento anterior. Además, estudiando los resultados de una forma más exhaustiva, como se ha comentado en el párrafo anterior, los valores del módulo C no proporcionan una aportación sustancial al análisis, quedando el modelo como el estudio de un proceso de forja y obviando el proceso de deformación que se produce en el material colindante al punzón.

En cierto modo los valores totales de la relación  $p/2k$  son menores que el planteamiento anterior, pero, siguiendo el razonamiento para el planteamiento 2, estos valores están falseados por esa mínima consideración otorgada al módulo externo, que tendría una deformación de los triángulos excesiva y, por consiguiente, el planteamiento 6 no se considera representativo, se rechaza y se continúa con el planteamiento 5.

#### 4.6.9 Modelo Adoptado

Finalmente, el modelo considerado es el mostrado en la Figura 4.53, rechazando el planteamiento 5 optimizado debido a las consideraciones y ajustes especiales que debían hacerse para el correcto funcionamiento del mismo.

Se opta por este último modelo por estar basado en el modelo del Campo de Líneas de Deslizamiento, que dibuja un campo de deformaciones similar pero a  $45^\circ$ . El modelo contará con dos módulos bajo el punzón, debido a la necesidad de estudiar el rozamiento en esta área, ya que con un sólo módulo no es posible reflejar este rozamiento en las ecuaciones resultantes.

En los capítulos de la Tesis Doctoral se presentan las correspondientes aplicaciones del modelo adoptado sobre un proceso de indentación.

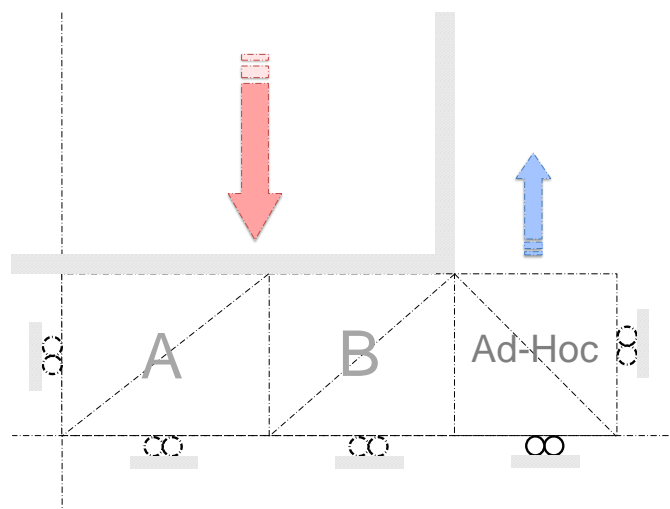


Figura 4.53: Modelo adoptado

## 4.6.10 Esquema de la evolución del modelo

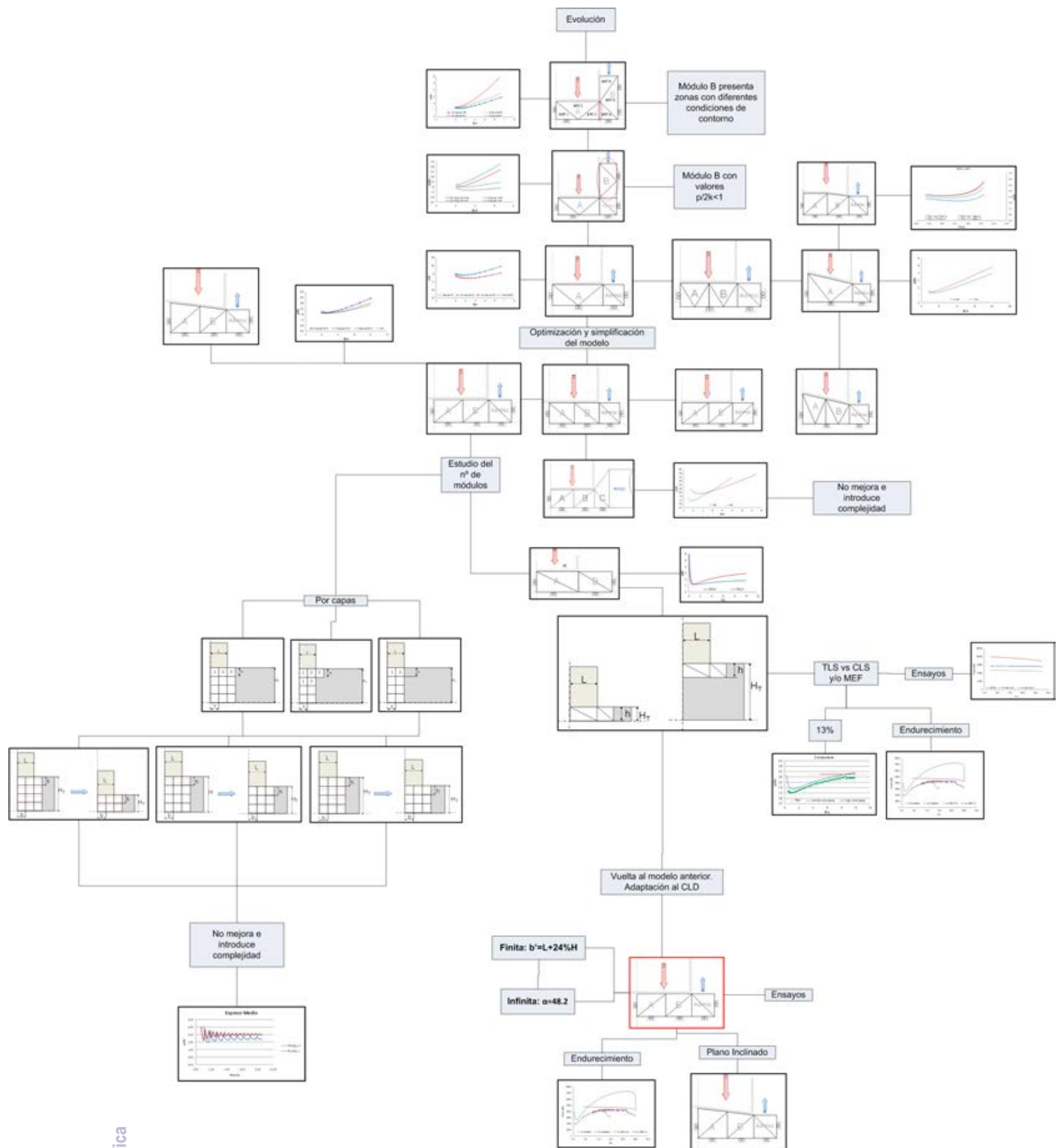


Figura 4.54: Modelo adoptado

## Referencias

- [1] E. M. Rubio, R. Domingo, C. González, and A. Sanz, "Análisis comparativo de modelos de bloques rígidos triangulares en el estudio mecánico de procesos de estirado superior," *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 115-116, p. 6, 2004.
- [2] F. Martín, L. Sevilla, E. M. Rubio, and M. A. Sebastian Perez, "Bases para la aplicación del teorema del límite superior en procesos de forja sobre configuraciones geométricas modulares," *Proc of the 2th CISIF-MESIC*, p. 8, 2007.
- [3] C. Bermudo, F. Martín, and L. Sevilla, "Application of the upper bound element technique with triangular rigid blocks in indentation," *American Institute of Physics Conference Proceedings*, vol. 1431, p. 14, 2011.
- [4] H. Kudo, "An upper-bound approach to plane-strain forging and extrusion-i," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 1, pp. 57-83, 1960.
- [5] F. Martín, "Desarrollo, integración y optimización en el estudio del proceso de forja mediante el teorema del límite superior a través del modelo de bloques rígidos triangulares," Thesis, Ingeniería de Fabricación, Universidad de Málaga, Málaga, 2009.
- [6] W.-C. Yeh and M.-C. Wu, "A variational upper-bound method for analysis of upset forging of rings," *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 170, pp. 392-402, 2005.
- [7] F. Martín, L. Sevilla, A. Camacho, and M. A. Sebastian, "Upper bound solutions of ring compression test," *Procedia Engineering*, vol. 63, pp. 413-420, 2013.
- [8] E. M. Rubio, M. A. Sebastián, and A. Sanz, "Mechanical solutions for drawing processes under plane strain conditions by the upper bound method," *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 143-144, pp. 539-545, 2003.
- [9] J. Qin, "An upper-bound approach to plane-strain problems using a general triangular element," *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 40, pp. 263-270, 1994.
- [10] B. Avitzur, J. C. Choi, and J. M. Kim, "The unity of upper-bound approaches to plane-strain deformation problems," *Journal of Mechanical Working Technology*, vol. 15, pp. 297-307, 1987.
- [11] G. W. Rowe, *Conformado de los metales*. Bilbao (España): Urmo, 1972.
- [12] W. Johnson, R. Sowerby, and J. B. Haddow, *Plane-strain slip-line fields: Theory and bibliography*. Edward Arnold, 1970.
- [13] J. Chakrabarty, *Theory of plasticity*. Oxford (U.K.): Elsevier Science, 2006.
- [14] F. Martín, C. Bermudo, and L. Sevilla, "Analytical approach to the indentation process. Application of the upper bound element technique," *Materials Science Forum*, vol. 713, pp. 13-18, 2011.
- [15] W. R. Hamilton, "The hodograph, or a new method of expressing in symbolical language the newtonian law of attraction," *Proc. Roy. Irish Acad.*, vol. 3, p. 9, 1846.
- [16] K. H. Jung, H. C. Lee, J. S. Ajiboye, and Y. T. Im, "Characterization of frictional behavior in cold forging," *Tribology Letters*, vol. 37, pp. 353-359, 2010.

- [17] A. I. H. Committee, *Handbook of friction, lubrication, and wear technology*. New York (USA): ASM International, 1992.
- [18] W. F. Hosford and R. M. Caddell, *Metal forming: Mechanics and metallurgy*. Cambridge (UK): Cambridge University Press, 2011.
- [19] C. Bermudo, F. Martín, and L. Sevilla, "Application of the upper bound element technique with triangular rigid blocks in indentation," *Proc of the 4th CISIF-MESIC*, p. 6, 2011.
- [20] M. A. Sellés, S. Sánchez-Caballero, M. A. Peydró, and D. Juárez, "A new method for can manufacturing," *Annals of the Oredia University. Fascicle of Management and Technological Engineering*, vol. IX (XIX), 2010.
- [21] M. A. Sellés, S. R. Schmid, S. Sánchez-Caballero, E. Perez-Bernabeu, and M. J. Reig, "Upper-bound modelization of an ironed three-layered polymer-coated steel strip," *International Journal of Advanced Manufacturing Technology* 2012.
- [22] M. A. Sellés, "Estudio y modelización de la fase de estirado en el proceso de embutición profunda sobre chapa de acero bajo en carbono con revestimiento multicapa de polímero," Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales, Universidad Politécnica de Valencia, Alcoy, 2009.

# CAPÍTULO 5

---

## ESTUDIO DE LA DEFORMACIÓN CON PUNZÓN PLANO

*Análisis, Desarrollo y Validación del Método del Límite Superior en Procesos de Conformado por Indentación*

---



## Índice Capítulo 5

5.1	Estudio del punzón plano .....	5.1
5.1.1	Configuración de pieza semi-infinita para CLD .....	5.2
5.1.2	Configuración de pieza finita para CLD .....	5.3
5.1.3	Piezas Finitas en TLS.....	5.4
5.1.4	Piezas Infinitas en TLS.....	5.9
5.1.5	Factor Geométrico de Ajuste .....	5.15
5.2	Contrastación final de resultados aportados por el TLS frente al CLD para indentación con punzón plano.....	5.20





## 5. ESTUDIO DE LA DEFORMACIÓN CON PUNZÓN PLANO

### 5.1 Estudio del punzón plano

Una vez establecido el modelo óptimo para el caso de deformación plástica mediante el proceso de forja por indentación, desarrollado y presentado en el Anexo II, se procede en el presente capítulo al análisis de dicho modelo según las características de las piezas tratadas, mostrando el desarrollo y las conclusiones pertinentes en cada caso.

El modelo final seleccionado se ha basado, finalmente, en el patrón desarrollado para la aplicación del Método del Campo de Líneas de Deslizamiento (CLD) aplicado a un proceso de indentación mediante punzón plano, considerando la pieza a deformar infinita. Dicho método de CLD establece que el ángulo que forma las líneas de fluencia del material con la superficie libre de la pieza adquiere un valor óptimo de  $45^\circ$ , con el cual se alcanza un valor reducido del esfuerzo realizado sobre la pieza (Figura 5.1). Con el fin de validar y verificar los resultados arrojados por la aplicación modular del TLS, se ha ido realizando una comparativa de este método con el del CLD, bajo la condición de deformación plana.

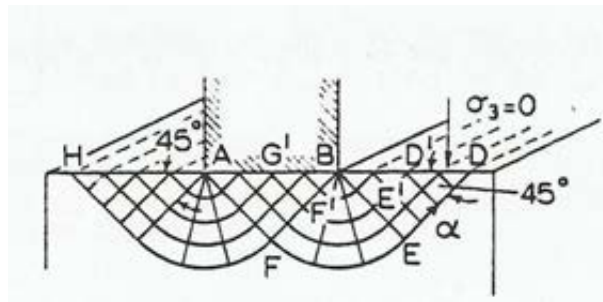


Figura 5.1: Campo de Líneas de Deslizamiento sugerido por Prandtl [1]

Dentro del grupo de los métodos analíticos, como se comentó en el capítulo 2, apartado 2.6.3, el CLD, descrito ampliamente en la bibliografía consultada a este respecto [1-4], es un método que se encuentra bastante extendido en el estudio de la deformación plástica mediante el conformado por indentación y que ha conseguido resultados bastante precisos en el desarrollo del mismo. Cabe destacar que el TLS, a su vez, puede interpretarse como un planteamiento extremo del CLD. Se puede apreciar, en la Figura 5.2, un esquema correspondiente a la aplicación del CLD

cuando se trabaja con la consideración de pieza finita, para el caso especial en el que el espesor de la pieza coincide con el ancho del punzón. Se aprecia que el campo de líneas trazado concuerda con las formas triangulares tratadas en el TLS, representadas en el croquis de la pieza infinita. Para piezas de espesores mayores, el CLD irá presentando diagramas más complejos (Figura 5.3), mientras que el TLS mantendrá la forma triangular discutida con anterioridad.

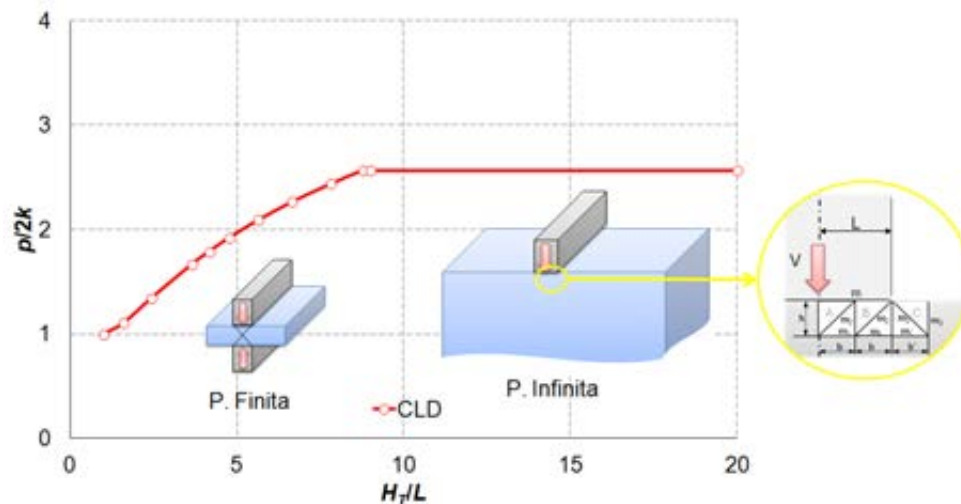


Figura 5.2: Representación gráfica del Campo de Líneas de Deslizamiento para una pieza finita

Por tanto, dentro de los métodos analíticos que basan su desarrollo en los mismos conceptos de la teoría de la plasticidad y que aplican hipótesis simplificadoras similares, el CLD resulta un método bastante apropiado para realizar una comparativa de los resultados obtenidos mediante la aplicación del TLS mediante BRT a un proceso de indentación.

Evitando redundar en la explicación del CLD, únicamente se esbozarán de forma accesoria dos casos prácticos, que serán precisamente aquellos en los que posteriormente se verá dividido el estudio en su aplicación al TLS.

#### 5.1.1 Configuración de pieza semi-infinita para CLD

La consideración de pieza semi-infinita, entendiendo como tal aquella cuyo espesor es mayor que el ancho del punzón, sin llegar a la categoría de infinita en las cuales no se considera la base de la pieza a deformar, suele presentarse como el caso de fluencia inicial provocada por un punzón plano bajo condiciones de deformación plana. Tomando la Figura 2.13 como referencia, una vez iniciada la presión del punzón, en las zonas OO' comienzan a formarse zonas plásticas donde la presión alcanza su mayor valor. Al tratarse de un material rígido-plástico perfecto, no se producirá ninguna deformación hasta que la fuerza aplicada sea lo suficientemente elevada como para que la zona plástica se expanda a lo largo de la zona de contacto del punzón.

La tensión de compresión principal adquiere el valor  $k$  a lo largo del contorno libre OC y O'C', por lo que, de la ecuación de Hencky [1], se deduce que la presión del punzón en el punto de fluencia tendrá el valor:

$$p = 2k \cdot \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{Ec. 5.1}$$

Este valor de presión se distribuirá uniformemente a lo largo del ancho del punzón.

### 5.1.2 Configuración de pieza finita para CLD

La indentación de una pieza finita, entendiendo como tal aquella que se encuentra limitada verticalmente, se presenta mediante una indentación simétrica. La pieza se verá indentada tanto por la parte superior como por la manteniéndose siempre la condición de doble simetría.

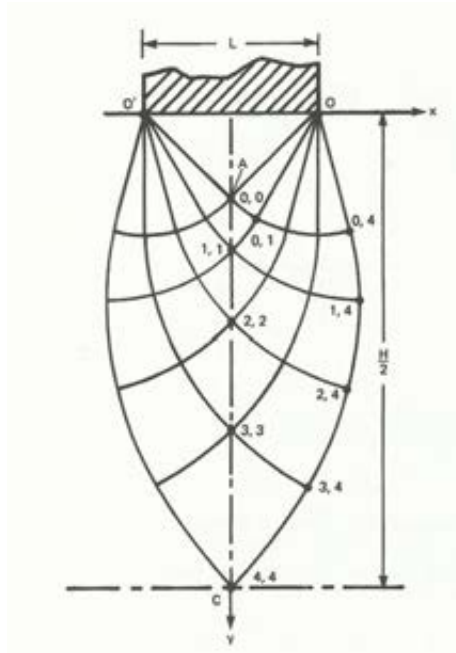


Figura 5.3: Aplicación del CLD a un proceso de indentación [2].

La Figura 5.3 muestra un campo determinado por dos grupos de líneas, formando dos abanicos centrales. Para este CLD en concreto, se adaptan las siguientes ecuaciones:

$$\sigma_{x(n,n)} = -p + 2k + 4k \cdot \Delta\phi_n \quad \text{Ec. 5.2}$$

Siendo  $\phi_n$  los giros absolutos, y  $\sigma_{x(n,n)}$  la tensión en el eje  $x$  para cualquier punto a lo largo de la línea central.

Como no existe restricción o empotramiento en el eje  $x$

$$F_x = 0 = \int_0^{H/2} \sigma_x dy \quad \text{Ec. 5.3}$$

Sustituyendo Ec. 5.2 en la Ec. 5.3 se tiene el siguiente resultado:

$$P = 2k + (4k/H) \int_0^{H/2} 2\Delta\phi dy \quad \text{Ec. 5.4}$$

Siendo los resultados los tratados con anterioridad y mostrados en la Figura 5.2.

Una vez conocido el planteamiento del CLD, método analítico planteado para la comparativa y ajuste del TLS mediante su consideración modular, a continuación se muestra el desarrollo matemático de este último. Igualmente, se ha dividido el ámbito de aplicación en piezas finitas e infinitas, radicando la diferencia del estudio principalmente en el cambio que se produce en las condiciones de contorno. Debido a este cambio en las condiciones de contorno, es necesario adaptar el modelo seleccionado en cada caso.

### 5.1.3 Piezas Finitas en TLS

Se considerarán piezas finitas aquellas que posean un espesor reducido debido a la proporcionalidad existente entre su espesor y el ancho del punzón ( $2L$ ), siendo en su mayoría las que se identifican en la industria como piezas de trabajo tipo chapa. La disposición modular para la aplicación del TLS se muestra en la Figura 5.4.

Las consideraciones a tener en cuenta serán las siguientes (5.5):

- 1) El rozamiento ( $m$ ) será aplicable únicamente a las zonas del material en contacto directo con el punzón, siendo en este caso las existentes en la superficie de los módulos A y B.
- 2) Internamente, para el planteamiento de las ecuaciones, se considerará un rozamiento interno del material igual a la unidad. Otro tipo de consideración no tendrá lugar ya que se trabaja con un material rígido-plástico perfecto, siendo nula la posibilidad de que se produzca algún tipo de fisura o separación. Esta unión del material se especifica con  $m_2$  y  $m_3$  (Figura 5.5).
- 3) Al abarcar los módulos toda la zona de material dispuesta bajo el punzón hasta el plano de simetría horizontal ( $h=H_T$ ), el rozamiento en dicho plano de simetría tendrá un valor  $m_1=0$ . Este comportamiento es debido al tratamiento simétrico del estudio. Los BRT inmediatamente inferiores, se moverán en la misma dirección y a la misma velocidad que los superiores, pertenecientes al módulo estudiado, no existiendo por tanto ningún tipo de fricción a considerar entre ellos.

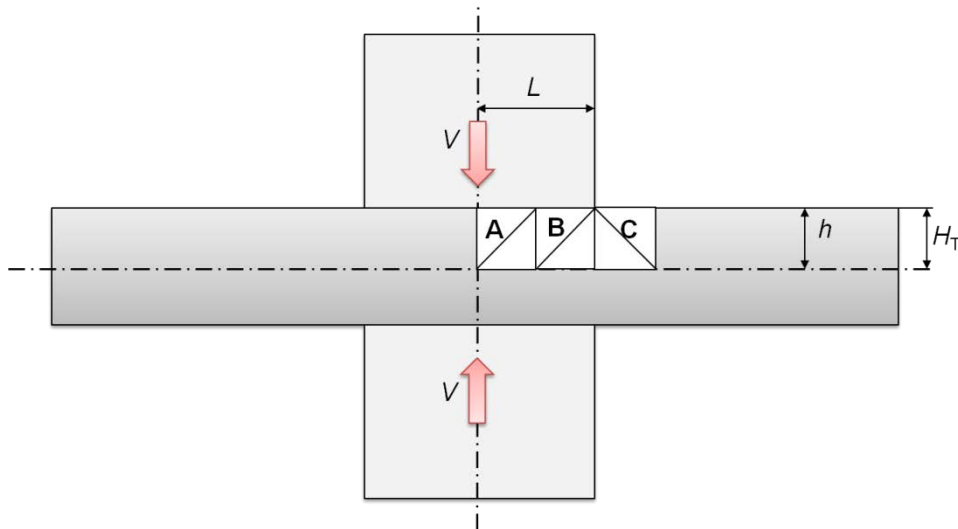


Figura 5.4: Aplicación modelo modular a pieza de espesor reducido

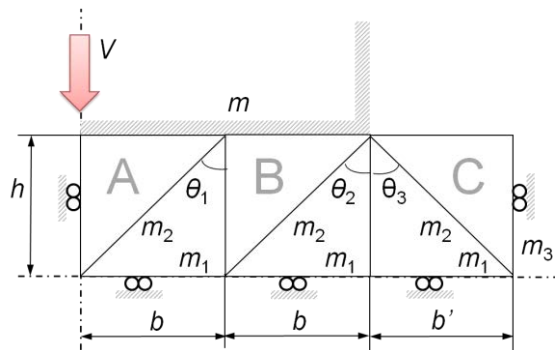


Figura 5.5: Detalle del planteamiento modular pieza espesor reducido

Como se aprecia en las figuras anteriores (Figura 5.4 y 5.5), los módulos situados bajo el punzón (A y B), equivaldrán a la longitud de un cuarto del punzón ( $b=L/2$ ). La base ( $b'$ ) del módulo exterior (C) requiere un tratamiento especial ya que no existe restricción física durante el proceso. Es necesario establecer el límite del ancho de este módulo, que, a su vez, restringirá la zona de material estudiado, según la deformación que se produce en el material. La relación ha sido establecida tanto con el ancho del punzón como con la altura de los módulos precedentes. Esto equivaldría a determinar una relación con el área de los módulos bajo el punzón, como se mostrará más adelante.

Una vez aclarada la distribución modular y la nomenclatura utilizada para el caso de estudio de una pieza considerada finita, se procede al análisis modular individual.

#### 5.1.3.1 Módulo A

El primer BRT se verá desplazado verticalmente con la misma velocidad que le confiera el punzón ( $V$ ). No tendrá velocidad horizontal (Figura 5.6) y verá limitado su movimiento únicamente en el eje vertical.

El primer hodógrafo construido siguiendo el razonamiento expuesto en el Capítulo 4, apartado 4.4, resulta de una complejidad menor al considerar una geometría de únicamente 2 BRT.

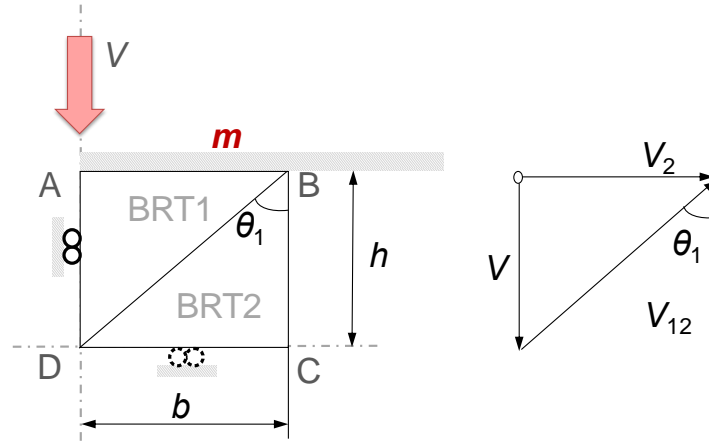


Figura 5.6: Configuración módulo A y hodógrafo correspondiente

Siguiendo el esquema de la Figura 5.6, se plantean las siguientes relaciones geométricas según los valores conocidos:

$$\overline{AB} = \overline{DC} = b = L/2 \quad \text{Ec. 5.5}$$

$$\overline{AD} = \overline{BC} = h = H_T \quad \text{Ec. 5.6}$$

$$\overline{BD} = \frac{h}{\cos\theta_1} \quad \text{Ec. 5.7}$$

$$\cos\theta_1 = \frac{h}{\sqrt{h^2 + b^2}} \quad \text{Ec. 5.8}$$

Como la velocidad del punzón ( $V$ ) es conocida, siendo en este caso igual a la unidad, es posible plantear las relaciones para la obtención del hodógrafo correspondiente al módulo A, como se muestra en las ecuaciones siguientes:

$$V_1 = 0 \quad \text{Ec. 5.9}$$

$$V_{12} = \frac{V}{\cos\theta_1} \quad \text{Ec. 5.10}$$

$$V_2 = V \cdot \tan\theta_1 \quad \text{Ec. 5.11}$$

Habiéndose establecido los parámetros desconocidos ( $V_1$ ,  $V_{12}$ ,  $V_2$ ) en función de los factores conocidos ( $b$ ,  $h$  y  $V$ ), sabiendo que  $m_2$  y  $m_3$  tienen valor unitario y siendo

una pieza de espesor reducido, por lo que  $m_1=0$ , es posible resolver la Ec. 4.1, para la obtención de la relación adimensional  $p/2k$ :

$$\begin{aligned}
 p \cdot V \cdot b \cdot w &= k \cdot w \cdot [V_1 \cdot m \cdot \overline{AB} + V_{12} \cdot m_2 \cdot \overline{BD} + V_2 \cdot m_1 \cdot \overline{DC}] \\
 &= k \cdot \left[ \frac{V}{\cos \theta_1} \cdot m_2 \cdot \frac{h}{\cos \theta_1} + \operatorname{tg} \theta_1 \cdot V \cdot b \cdot m_1 \right] \\
 &= k \cdot \left[ \frac{1}{\frac{h}{\sqrt{h^2 + b^2}}} \cdot m_2 \cdot \frac{h}{\frac{h}{\sqrt{h^2 + b^2}}} + \frac{b}{h} \cdot b \cdot m_1 \right]
 \end{aligned}
 \tag{Ec. 5.12}$$

Quedando la relación general de  $p/2k$  para este módulo como:

$$\left( \frac{p}{2k} \right)_A = \frac{1}{2 \cdot b} \cdot \left[ \frac{h^2 + b^2 + b^2 \cdot m_1}{h} \right]
 \tag{Ec. 5.13}$$

Siendo la relación para el caso de espesor reducido la siguiente:

$$\left( \frac{p}{2k} \right)_A = \frac{1}{2 \cdot b} \cdot \left[ \frac{h^2 + b^2}{h} \right]
 \tag{Ec. 5.14}$$

Se aprecia cómo el factor de rozamiento no aparece en la relación  $p/2k$  para el módulo A. Esto es debido a que es el BRT1 el que incorpora este factor de rozamiento (Ec. 5.12, producto  $V_1 \cdot m$ ), pero al ser su velocidad absoluta igual a cero, ya que no realiza movimiento en la horizontal, el factor de rozamiento desaparece de la ecuación.

### 5.1.3.2 Módulo B

Este módulo recibe tanto el empuje del punzón como el empuje del módulo A precedente, por lo que se tendrán en cuenta ambas velocidades de entrada a la hora de plantear el hodógrafo correspondiente. Tanto el módulo estudiado como el hodógrafo se muestran en la Figura 5.7.

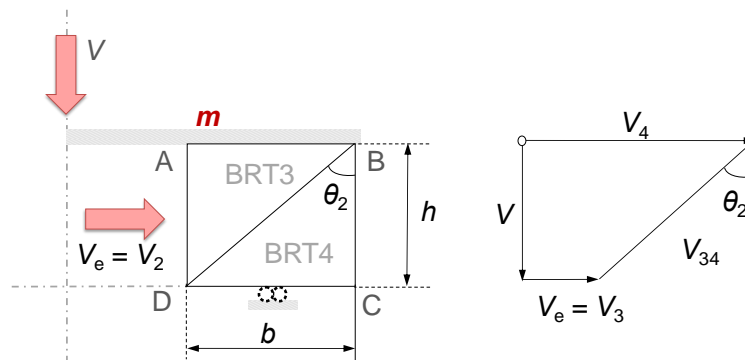


Figura 5.7: Configuración módulo B y hodógrafo correspondiente

Sabiendo que la velocidad de entrada del módulo B corresponde con la velocidad de salida del módulo A, se puede plantear la siguiente relación:

$$V_e = V_2 = V \cdot \tan \theta_1 = V \cdot \frac{b}{h} \quad \text{Ec. 5.15}$$

Del mismo modo que en el apartado anterior, se procede a la resolución de la ecuación del Teorema expuesta en capítulos anteriores:

$$\begin{aligned} p \cdot V \cdot b \cdot w &= k \cdot w \cdot [V_e \cdot m \cdot \overline{AB} + V_{34} \cdot m_2 \cdot \overline{DB} + V_4 \cdot m_1 \cdot \overline{DC}] \\ &= k \cdot \left[ V \cdot \frac{b}{h} \cdot m \cdot b + \frac{V}{\cos \theta_2} \cdot \frac{h}{\cos \theta_2} \cdot m_2 + (V_e + V \cdot \tan \theta_2) \cdot b \cdot m_1 \right] \\ &= k \cdot \left[ \frac{b \cdot b \cdot m}{h} + \frac{m_2}{h/\sqrt{h^2 + b^2}} \cdot \frac{h}{h/\sqrt{h^2 + b^2}} + \left( \frac{b}{h} + \frac{b}{h} \right) \cdot b \cdot m_1 \right] \end{aligned} \quad \text{Ec. 5.16}$$

Quedando la relación general de  $p/2k$  para este módulo como:

$$\left( \frac{p}{2k} \right)_B = \frac{1}{2 \cdot b} \cdot \left[ \frac{b^2 \cdot m + (h^2 + b^2) \cdot m_2 + 2b^2 \cdot m_1}{h} \right] \quad \text{Ec. 5.17}$$

Y en particular, para el caso de espesor reducido, como:

$$\left( \frac{p}{2k} \right)_B = \frac{1}{2 \cdot b} \cdot \left[ \frac{b^2 \cdot m + h^2 + b^2}{h} \right] \quad \text{Ec. 5.18}$$

### 5.1.3.3 Módulo C

Este módulo (Figura 5.8) recibe únicamente el empuje del módulo adyacente B, dado que no se encuentra bajo la superficie del punzón. Es necesario, para plantear el hodógrafo, considerar el lateral derecho de dicho módulo como zona rígida que impida parcialmente el movimiento libre del material en esa dirección. La correspondiente velocidad de entrada del módulo C ( $V_5$ ), como en el caso anterior, equivaldrá a la velocidad que tendrá el BRT colindante ( $V_4$ ), siendo en este caso el BRT4. El factor de rozamiento no se verá incorporado al no estar en contacto con el punzón ni posteriormente entrar en contacto en todo el proceso de deformación.

Siguiendo el esquema de la Figura 5.8, se plantean las relaciones geométricas al igual que se plantearon para el módulo A y B, quedando las incógnitas en función de los valores conocidos ( $h$ ,  $b'$  y  $V$ ), pudiendo resolver la ecuación general como sigue a continuación.



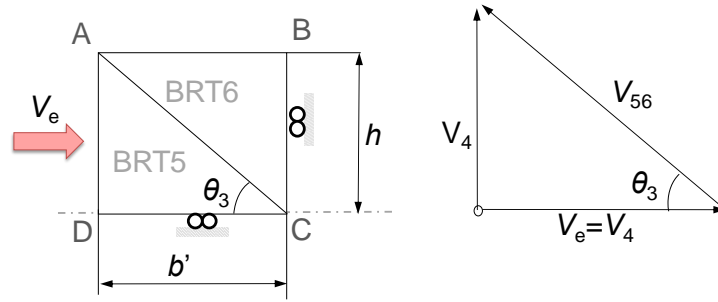


Figura 5.8: Configuración módulo C y hodógrafo correspondiente

Sabiendo que la velocidad de entrada corresponde a la siguiente ecuación:

$$V_e = V_4 = V \cdot (tg\theta_1 + tg\theta_2) = V \cdot \frac{2b}{h} \quad \text{Ec. 5.19}$$

La ecuación principal quedaría de la siguiente forma:

$$p \cdot V \cdot b \cdot w = k \cdot w \cdot [V_e \cdot m_1 \cdot \overline{DC} + V_{56} \cdot m_2 \cdot \overline{AC} + V_6 \cdot m_3 \cdot \overline{BC}] = \quad \text{Ec. 5.20}$$

$$k \cdot \left[ V \cdot (tg\theta_1 + tg\theta_2) \cdot m_1 \cdot b' + \frac{V \cdot (tg\theta_1 + tg\theta_2)}{\cos\theta_3} \cdot m_2 \cdot \frac{b'}{\cos\theta_3} + V \cdot (tg\theta_1 + tg\theta_2) \cdot tg\theta_3 \cdot m_3 \cdot h \right]$$

$$= k \cdot \left[ b' \cdot m_1 \cdot \frac{2b}{h} + \frac{2b/h}{b'/\sqrt{h^2 + b'^2}} \cdot m_2 \cdot \frac{b'}{b'/\sqrt{h^2 + b'^2}} + \frac{2b \cdot h \cdot m_3}{b'} \right]$$

Resultando finalmente la relación general de  $p/2k$  para este módulo como:

$$\left(\frac{p}{2k}\right)_c = \frac{b}{b' \cdot h} \cdot \left[ b' \cdot m_1 + \frac{(h^2 + b'^2) \cdot m_2}{b'} + \frac{h^2 m_3}{b'} \right] \quad \text{Ec. 5.21}$$

Quedando simplificada, para el caso de pieza de espesor reducido ( $m_1=0$ ,  $m_2=m_3=1$ ), de la siguiente forma:

$$\left(\frac{p}{2k}\right)_c = \frac{b}{b' \cdot h} \cdot \left[ \frac{2h^2 + b'^2}{b'} \right] \quad \text{Ec. 5.22}$$

#### 5.1.4 Piezas Infinitas en TLS

Para las piezas que poseen un espesor considerable, identificado para el presente caso de estudio como aquellas piezas cuya relación de factor de forma

$H_T/L > 7$  y que suelen corresponderse con las piezas que se trabajan con más asiduidad en la industria, se considerarán como piezas de espesor infinito debido a la proporcionalidad comparativa existente entre su espesor y el ancho del punzón ( $2L$ ). En este caso se plantea el estudio como se muestra en la Figura 5.9

Las consideraciones a tener en cuenta serán las siguientes:

- 1) Al igual que en el caso anterior (la pieza de tratamiento finito), el rozamiento ( $m$ ) será aplicable únicamente a las zonas del material en contacto directo con el material, quedando restringido para el módulo A y B, debido a la configuración modular implementada.
- 2) Al no abarcar los módulos toda la zona de material dispuesta bajo el punzón hasta la línea de simetría ( $h \neq H_T$ ), el rozamiento en esta zona tendrá un valor igual a  $m_1=1$ . Este comportamiento es debido a que el material colindante, en la parte inferior de los BRT, no se moverá en la misma dirección y con la misma velocidad, generando, por tanto, cierta fricción interna. Cualquier valor de  $m_1$  distinto de la unidad comportaría la existencia de cierta discontinuidad en el material, es decir, cierta separación interior, quedando así justificado que el valor de  $m_1$  deberá ser igual a la unidad, lo que implica una adherencia completa de todo el material colindante a los módulos.
- 3) La altura de los módulos vendrá marcada por el ángulo  $\theta_i$  (5.5), siendo  $i$  el número de módulo al que corresponde ( $i=1$  a 3).  $\theta_i$  es el ángulo óptimo para la configuración seleccionada.

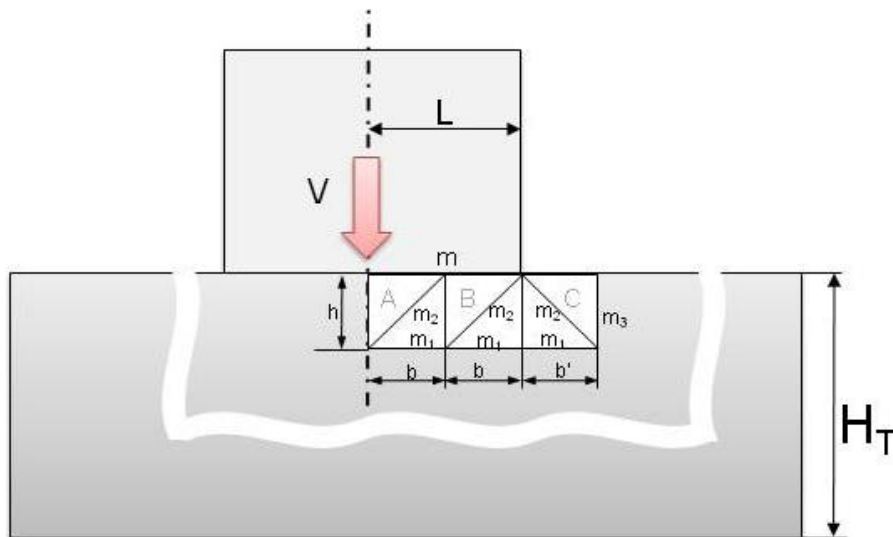


Figura 5.9: Ilustración aplicación modular a espesor infinito

Como se aprecia en la Figura 5.9, y al igual que en las piezas de tratamiento finito, cada uno de los módulos situados directamente bajo el punzón equivaldrán a la longitud de un cuarto del punzón ( $b=L/2$ ) y la longitud de la base ( $b'$ ) del módulo exterior (C) vendrá limitada por su ángulo  $\theta_3$  correspondiente. Por consiguiente, se

procede al análisis de los módulos por separado, al igual que se ha realizado con la consideración finita.

#### 5.1.4.1 Módulo A

Siguiendo el mismo esquema de la Figura 5.6 referente al tratamiento finito de la pieza a analizar, obviando la línea de simetría al otorgarle el nuevo tratamiento de pieza infinita, estableciendo los parámetros desconocidos en función de los factores conocidos ( $b$ ,  $h$  y  $V$ ), y sabiendo que, al ser una pieza de espesor infinito,  $m_1=1$ , es posible resolver nuevamente la Ec. 4.3, quedando la relación  $p/2k$  tal como se muestra a continuación:

$$\left(\frac{p}{2k}\right)_A = \frac{1}{2 \cdot b} \cdot \left[ \frac{h^2 + b^2 + b^2 \cdot m}{h} \right] \quad \text{Ec. 5.23}$$

La Ec. 5.23 será igual a la Ec. 5.12, debido a la ausencia de velocidad absoluta horizontal en el BRT1, que es la variable que iría acompañada de la componente  $m_1=1$ . Por el contrario, en el tratamiento del siguiente módulo sí aparecerá reflejado este cambio.

#### 5.1.4.2 Módulo B

Igualmente, se seguirá el esquema de la Figura 5.7, obviando la línea de simetría. La relación para hallar los valores desconocidos en función de los conocidos y la resolución de la ecuación del Límite Superior es similar, recordando que en esta ocasión  $m_1=1$ , al contrario que para el caso finito, cuya  $m_1=0$ . La ecuación de  $p/2k$  para este módulo, es la siguiente:

$$\left(\frac{p}{2k}\right)_B = \frac{1}{2 \cdot b} \cdot \left[ \frac{h^2 + 3b^2 + b^2 \cdot m}{h} \right] \quad \text{Ec. 5.24}$$

#### 5.1.4.3 Módulo C

Al igual que para los módulos anteriores, se seguirá el esquema de la Figura 5.8 y se ignorará la línea de simetría, quedando de esta forma planteado el módulo para una pieza infinita. La resolución de la ecuación resultaría del siguiente modo:

$$\left(\frac{p}{2k}\right)_C = \frac{b}{b' \cdot h} \left[ b' + \frac{2h^2 + b'^2}{b'} \right] \quad \text{Ec. 5.25}$$

#### 5.1.4.4 Implementación

Una vez analizado cada módulo por separado, según el caso correspondiente, con el fin de obtener una ecuación que represente los resultados generales de las combinaciones de los diferentes módulos y para futuras comparativas con distintos métodos de resolución, será necesario evaluar la relación  $p/2k$  total del conjunto. Para

ello, se estima una media ponderada de los tres módulos, como se muestra en la Ec. 5.26:

$$\left(\frac{p}{2k}\right)_T = \frac{\left(\frac{p}{2k}\right)_A * b + \left(\frac{p}{2k}\right)_B * b + \left(\frac{p}{2k}\right)_C * b'}{2b + b'} \quad \text{Ec. 5.26}$$

Antes de proceder a la implementación de las ecuaciones, será necesario establecer la longitud del módulo exterior  $b'$ , siendo ésta la longitud de la base del módulo que no se encuentra limitado por la influencia del punzón o geometría cercana alguna. Como se aprecia en las figuras anteriores, los módulos que se encuentran bajo el punzón sí están acotados, ya que cada uno abarcará la cuarta parte del ancho del punzón, pero el módulo exterior no está acotado en la zona que se encuentra en contacto con el material no deformado que, en el esquema (Figura 5.9), se encuentra a la derecha y para la que, por tanto, es necesario establecer una longitud apropiada a fin de llevar a cabo el estudio del proceso de indentación, sin obviar el material, que también sufre deformación plástica en esta zona.

Este parámetro presentará valores diferentes en función del tratamiento de la pieza estudiada, según ésta sea finita o infinita.

Para las piezas consideradas infinitas, establecer esta longitud es relativamente sencillo, ya que dependerá del ángulo  $\theta_3$  que se haya considerado óptimo. Sin embargo, para las piezas finitas, dado que los módulos abarcan toda la zona de material bajo el punzón hasta llegar a la línea de simetría, estos ángulos van cambiando conforme se realiza la penetración y no es posible establecer esta longitud con el mismo criterio.

En primer lugar se ha optado por realizar una revisión bibliográfica al respecto, buscando aquellos estudios que han sido capaces de acotar esa zona de deformación plástica que se produce alrededor del punzón. Sin embargo, aunque existen diversos estudios que abarcan dicha temática, no ha sido posible aplicarlos al estudio objeto de la presente tesis.

En efecto, entre los estudios consultados, se mencionan los realizados por K. I. Johnson en 1969 [5], uno de los primeros desarrollados sobre esta temática, que plantea modelos que abarcan deformaciones radiales; o el llevado a cabo por A. E. Giannakopoulos en 1993 [6], que estudia la indentación piramidal, tipo Vicker, para materiales de comportamiento elástico o elástico-plástico y que plantea unas relaciones entre los esfuerzos y la profundidad de penetración de la deformación. También se han encontrado estudios de C. L. Woodcock de 2000 [7], que plantea una constante que relaciona el radio de deformación con la huella del indentador. Igualmente tampoco es posible realizar una similitud con el proceso de indentación estudiado en la presente tesis, ya que Woodcock estudia el proceso mediante indentador esférico y trabaja con tamaños de 100  $\mu\text{m}$ .

Estudios más recientes, como el llevado a cabo en la Tesis “Numerical, Analytical and Experimental Analysis of Indentation” de 2005, del Dr. N. Topcu [8], plantea la resolución de un problema de indentación con punzón plano mediante TLS, siendo el punzón de aristas redondeadas. Siendo éste un problema similar al estudiado aquí, sin embargo para su análisis no se plantea ningún tipo de relación para establecer la longitud del módulo exterior. Únicamente se lleva a cabo una optimización de dicha longitud en relación a la altura de los módulos. Es decir, para distintos anchos de punzón, otorga distintos valores de longitud y altura, fijando aquéllos en los que la relación adimensional  $p/2k$  es menor.

Por último, un estudio reciente llevado a cabo por Z. Song en 2013 [9], realiza un estudio exhaustivo de una indentación esférica pero, nuevamente, la deformación horizontal queda sin especificar, ofreciendo únicamente la profundidad de la deformación o zona plástica.

Con los anteriores estudios mencionados, queda patente la dificultad que deriva de la resolución del radio de acción de la deformación plástica en la zona horizontal alrededor del punzón, aparte de la imposibilidad de aplicar estos estudios al proceso de indentación estudiado, bien por tratarse de distintas escalas de trabajo o distintos tipos de indentador. La mayoría de los estudios detallados se aplican a ensayos de dureza, tales como los ensayos Brinell o Vickers y, por lo tanto, en ellos se trabaja con escalas de micro y nano indentaciones. Sin embargo, el presente estudio se centra en piezas de trabajo a nivel industrial, por lo que no existe un paralelismo en la escala del proceso, ya sea considerando el tamaño del indentador o la profundidad alcanzada en la indentación. Para los ensayos de dureza, las penetraciones producidas son superficiales, mientras que en el proceso estudiado en este trabajo se producen penetraciones profundas.

Una vez descartada la posibilidad de asociar una longitud adecuada basada en estudios precedentes sobre deformación en procesos de indentación, se ha procedido a realizar un estudio de esta deformación plástica mediante el Método de Elementos Finitos (MEF). Para su aplicación, se utiliza el software DEFORM 2D [10], especializado en procesos de conformado por deformación plástica.

Mientras que para la profundidad que adquiriría el radio de acción de la deformación en la aplicación del MEF (Figura 5.10) sí se pudo establecer un valor constante igual a  $2,5L$ , no ha sido posible hallar ningún valor en la deformación horizontal, ya que ésta aumenta de forma aleatoria según la penetración del punzón (Figura 5.11). Cabe destacar que la constante encontrada para la deformación producida en la vertical es similar a la relación hallada por Woodcock [7], en la que  $c/a=m$ , siendo  $c$  el radio de deformación,  $a$  la huella del indentador y  $m$  una constante igual a 2,5, lo que exhibe cierta similitud en los procesos, ya que, a distintas escalas, ambos son indentaciones sobre materiales metálicos.

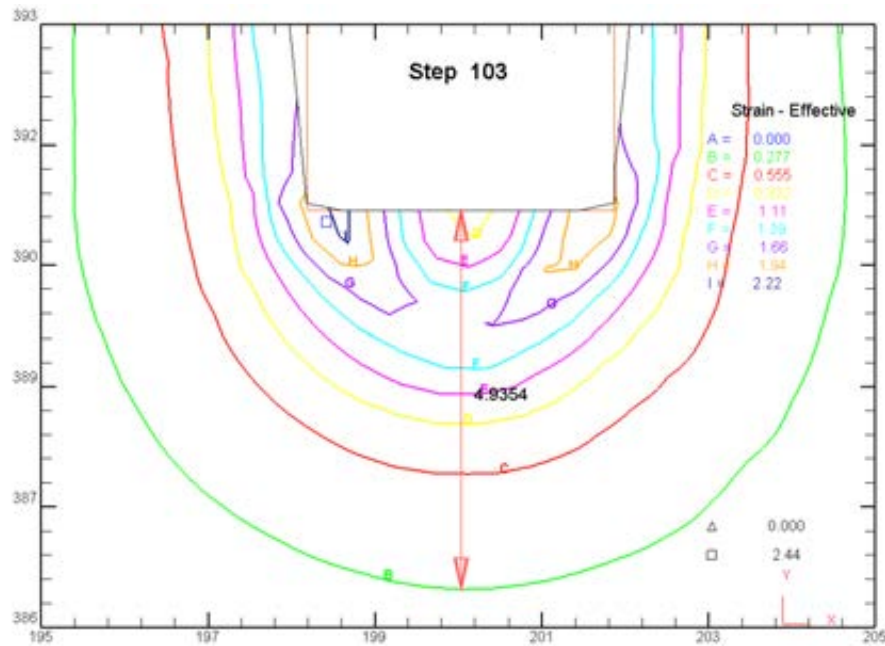


Figura 5.10: Radio de acción vertical de la deformación

En la Figura 5.11 se muestra cómo para la penetración considerada la deformación alcanza los 1,94 mm pero, si se continúa con dicha penetración, esta longitud irá aumentando, siendo imposible por tanto relacionarla con el ancho del punzón, como sí ocurre con la deformación directamente bajo el punzón.

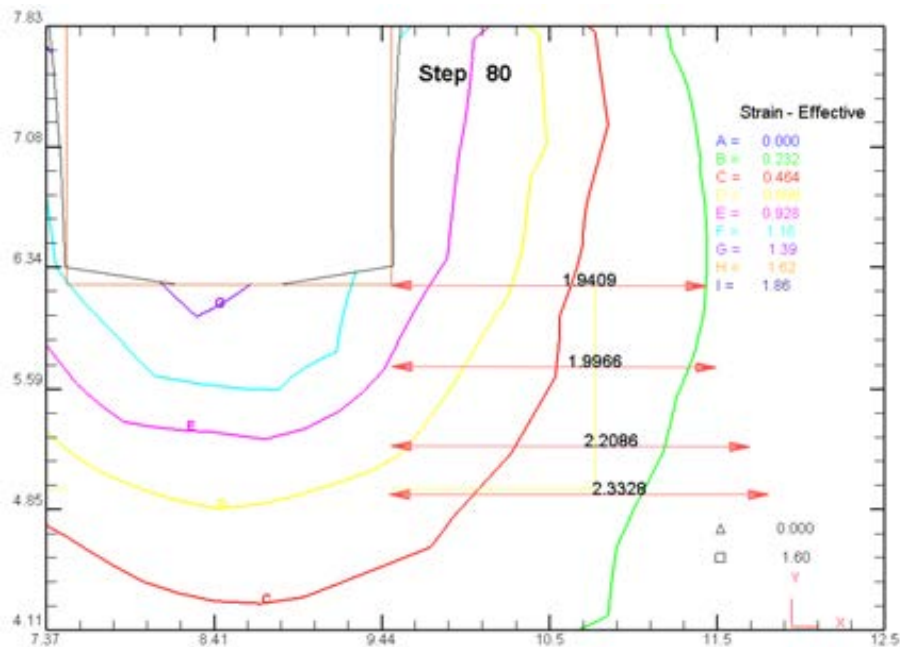


Figura 5.11: Radio de acción horizontal de la deformación

Por tanto, en la necesidad de establecer una longitud adecuada a la base del módulo exterior y sin la posibilidad de obtener este dato de estudios sobre indentación o mediante herramientas que impliquen la resolución del proceso mediante el MEF, se

realiza un estudio más detallado de este módulo, con el fin de llevar a cabo una relación con los módulos anteriores y el punzón, es decir, con el área del conjunto.

### 5.1.5 Factor Geométrico de Ajuste

En la Ec. 5.27 se propone una expresión que permite determinar la anchura del tercer módulo en relación con el ancho del punzón y con la altura de los módulos, que equivale a la altura del cuarto de pieza estudiado, de acuerdo a la doble simetría. Debido a la naturaleza cambiante del área de las deformaciones producidas en la zona horizontal exterior al punzón, es necesario introducir una variable que vaya generando nuevas longitudes conforme el proceso avanza. Esta variable no es otra que la altura de los módulos, que disminuirá conforme avanza el punzón, generando un estudio como el mostrado en la Figura 5.12, que conserva cierto parecido con el CLD planteado para este tipo de procesos de deformación (Figura 5.3)

$$b' = L + 24\%H_T \quad \text{Ec. 5.27}$$

Se ha seleccionado el 24% debido a los valores de  $p/2k$  que se obtienen para el módulo C. Se puede ver en el Figura 5.13 que, aumentando más el porcentaje, se consigue una mayor aproximación a los valores obtenidos mediante la aplicación del CLD. Desgraciadamente, en ese caso los valores que arroja el módulo C son menores a la unidad, como se aprecia en la

Tabla 5.1, por lo que adoptando un porcentaje mayor se incurriría en un error. Al adoptar el 24%, se obtienen valores menores a la unidad para *Factores de Forma* (FF) mayores a 7, para los cuales ya se trataría de una pieza considerada como infinita y no se estaría trabajando con las ecuaciones para piezas finitas. Por tanto, esos resultados no se tienen en cuenta una vez superado el FF de 7.

La Ec. 5.27 se puede relacionar con el área estudiada bajo el punzón ( $A_1$ ) de la forma en que se muestra en la Ec. 5.28 y Ec. 5.29. Por tanto,  $b'$  es directamente proporcional al área de material estudiada bajo el punzón, ya que cuando aumente  $A_1$ , también aumentará  $h$ , quedando  $L$  constante, aumentando así de forma controlada  $b'$ .

$$b' = f(L) + f(h) \quad \text{Ec. 5.28}$$

$$b' = \frac{A_1}{h} + 24\% \frac{A_1}{L} \quad \text{Ec. 5.29}$$

Se aprecia la introducción de un porcentaje de ajuste en la ecuación que establece la longitud del módulo exterior, al que se ha denominado *Factor Geométrico de Ajuste* (FGA). Una vez establecida la relación adecuada, mediante la comparativa con el método analítico antes mencionado (CLD), bajo las mismas condiciones generales y de contorno, se establece el ajuste óptimo, introduciéndose para ello este



porcentaje de la altura. En la Figura 5.13 se aprecia cómo van variando los resultados obtenidos mediante el incremento del FGA.

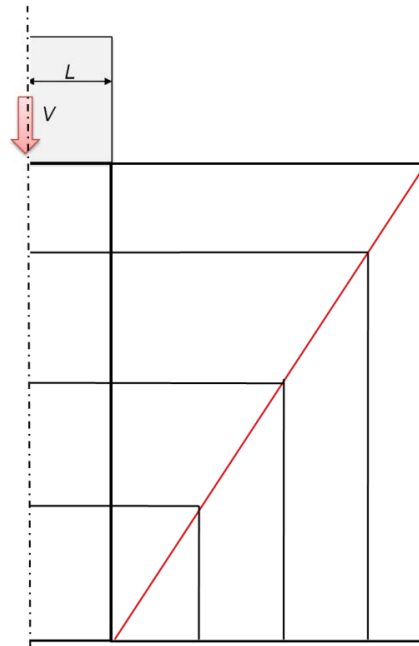


Figura 5.12: Evolución de la aplicación modular a pieza finita

Sin embargo, si se aplican porcentajes mayores (Figura 5.14), se estaría cometiendo una incongruencia al determinar los resultados, ya que la relación  $p/2k$  no debe ser menor a la unidad. El hecho de ser menor a la unidad implicaría que el material se está deformando antes de llegar a su límite de fluencia a cortadura, situación incompatible con cualquier proceso de deformación.

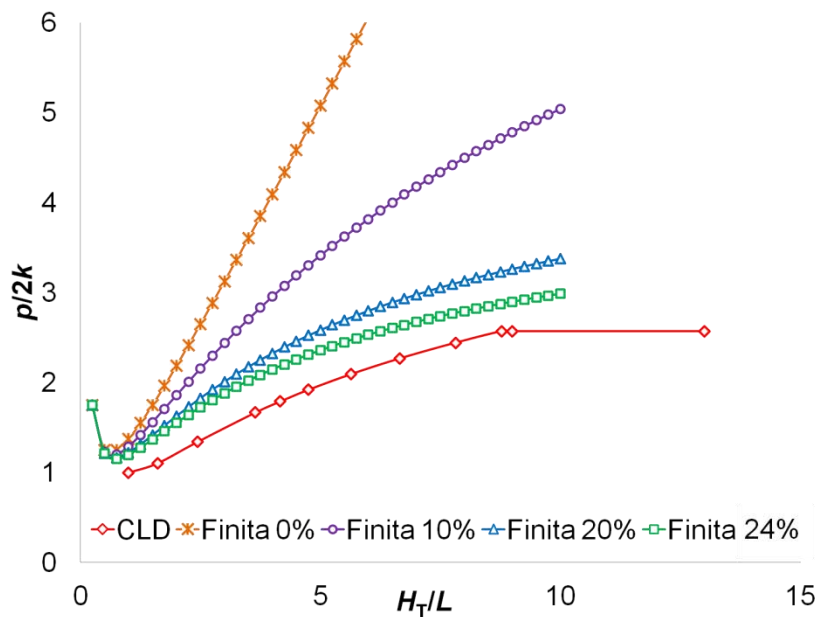


Figura 5.13: Variación de  $p/2k$  según el porcentaje asignado



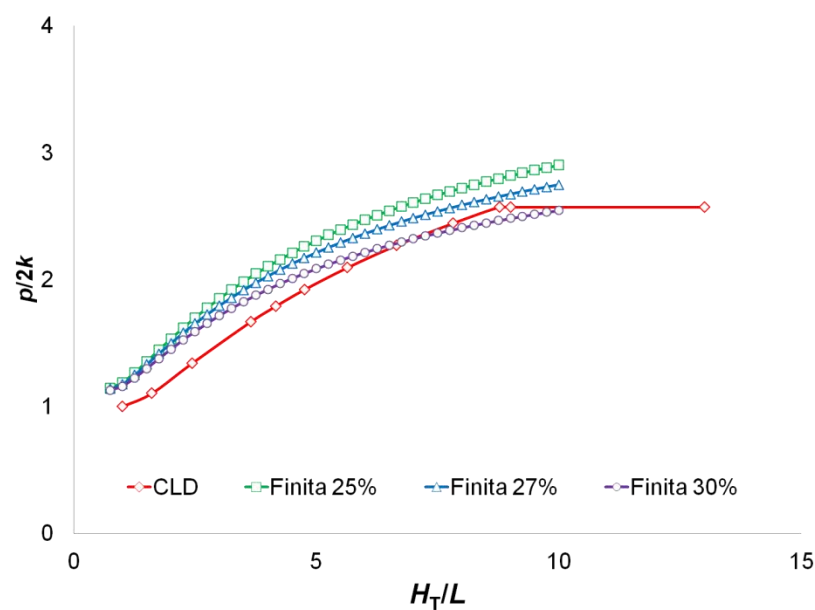


Figura 5.14: Variación de  $p/2k$  para valores mayores a 24%

Tabla 5.1: Resultados de  $p/2k$  para el módulo C

C (24%)	C (27%)	C (30%)	$H_T/L$
0,87	0,78	0,68	10,00
0,88	0,79	0,68	9,75
0,89	0,80	0,69	9,50
0,90	0,81	0,70	9,25
0,91	0,82	0,71	9,00
0,92	0,83	0,72	8,75
0,93	0,84	0,73	8,50
0,94	0,85	0,74	8,25
0,95	0,86	0,75	8,00
0,96	0,87	0,77	7,75
0,97	0,89	0,78	7,50
0,99	0,90	0,79	7,25
1,00	0,91	0,80	7,00
1,01	0,92	0,81	6,75
1,02	0,93	0,82	6,50
1,03	0,95	0,84	6,25
1,04	0,96	0,85	6,00
1,05	0,97	0,86	5,75
1,07	0,98	0,87	5,50
1,08	0,99	0,89	5,25
1,09	1,01	0,90	5,00

El espesor exacto en el que será necesario cambiar el tratamiento de pieza finito de la pieza analizada al tratamiento infinito y, por tanto, cambiar el valor de  $m_1$  según corresponda en las ecuaciones mostradas con anterioridad, dependerá de los valores

de  $p/2k$ . Para ello, se seleccionan aquellos resultados que arrojen los valores menores, según el FF ( $H_T/L$ ) en el que se encuentre el análisis.

Al igual que en el caso de pieza finita, para el tratamiento infinito será necesario establecer tanto la altura de los módulos como la extensión del módulo exterior. Tomando como referencia el planteamiento realizado para el CLD, se definirá el conjunto modular por medio de los ángulos de cada módulo, establecido como el ángulo  $\theta_i$  óptimo. Asimismo, se considerará que los tres ángulos presentes en el diseño modular serán iguales. Por tanto  $\theta_r = \theta_{opt}$ .

Para establecer dicho ángulo óptimo, es necesario realizar una nueva comparativa con el método analítico del CLD, similar en su desarrollo y aplicación. Este método considera como ángulo óptimo  $45^\circ$  (Figura 5.1). Igualmente, considera este ángulo para todas las líneas principales de deformación.

En la Figura 5.15 se muestra la evolución de los resultados de  $p/2k$  para el estudio de una pieza infinita, variando el valor de  $\theta_{opt}$  desde el valor considerado óptimo para el CLD. En el caso del TLS mediante la aplicación modular de BRT, para el estudio de piezas infinitas, el valor óptimo para  $\theta_{opt}$  es de  $48,2^\circ$ . La Tabla 5.2 muestra los valores de  $p/2k$  respectivos a cada ángulo óptimo para cada método.

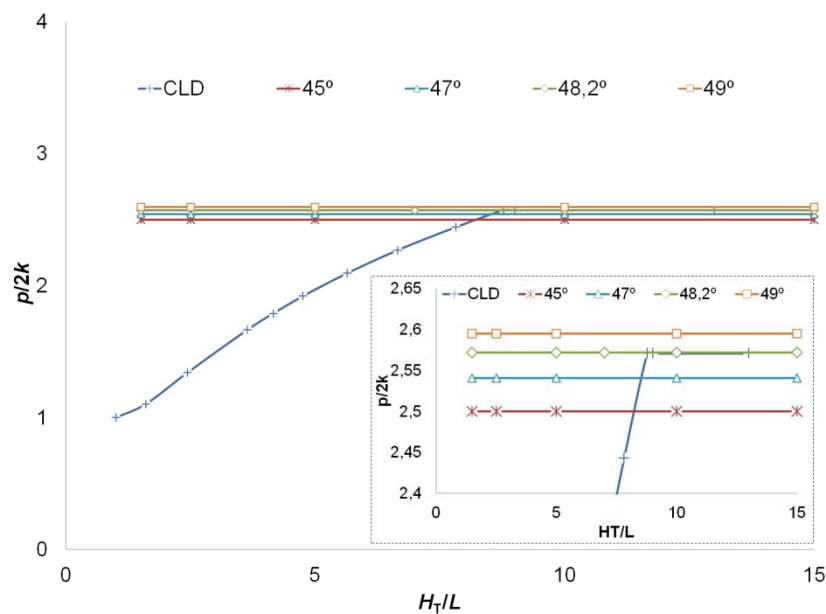


Figura 5.15:  $p/2k$  para distintos  $\theta$

Tabla 5.2: Valores de  $p/2k$  para  $\theta$  óptimo

CLD		TLS	
$\theta_{opt}$	$45^\circ$	$\theta_{opt}$	$48,2^\circ$
$p/2k$	2,571	$p/2k$	2,572

Una vez establecidos los criterios de actuación para ambas modalidades de estudio, tanto la finita como la infinita, habiendo establecido el ángulo óptimo para el

caso de pieza infinita y habiéndose hallado la relación idónea para construir la longitud adecuada del módulo exterior para el caso de pieza finita, ya es posible realizar una combinación de ambas modalidades.

Finalmente, en la Figura 5.16 se muestran los resultados del estudio para distintos factores de forma, con un rozamiento por adherencia de 0,7 teniendo en cuenta el planteamiento para una pieza finita o infinita. Se aprecia que a partir de un FF de 7, los valores de  $p/2k$  con el planteamiento finito superarían a los valores de  $p/2k$  para piezas infinitas. Por tanto, a partir de un FF igual o superior a 7, se trabajará con la consideración de pieza infinita, siendo  $m_1=1$ .

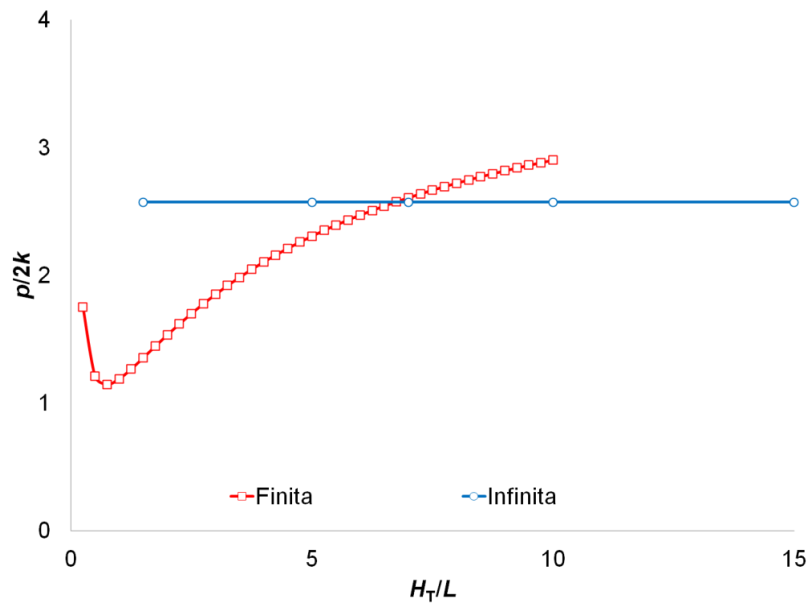


Figura 5.16: Cruce de resultados entre modelos Finito e Infinito

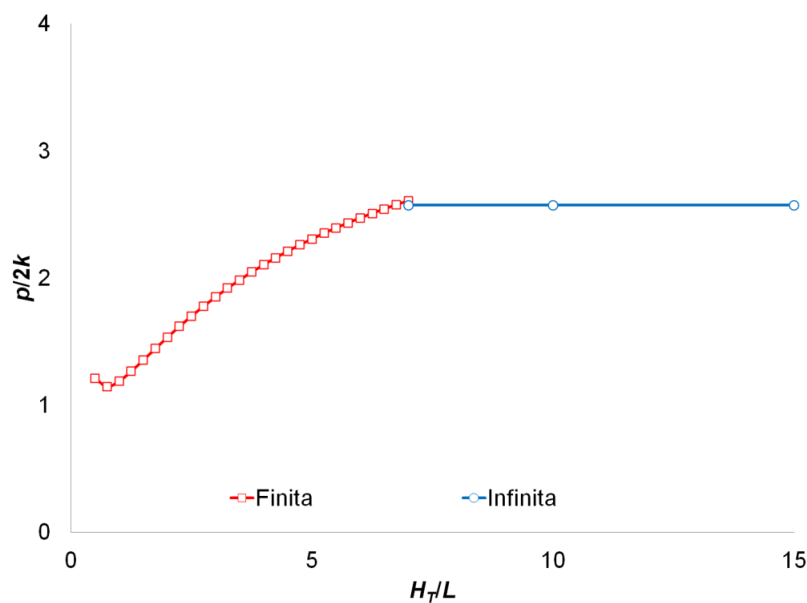


Figura 5.17: Composición de resultados

En la Figura 5.17 se muestra únicamente la composición de resultados válidos según el FF apropiado.

## 5.2 Contrastación final de resultados aportados por el TLS frente al CLD para indentación con punzón plano.

Realizando la comparativa entre los resultados obtenidos mediante la aplicación del método de Campo de Líneas de Deslizamiento y la aplicación modular del Teorema del Límite Superior (Figura 5.18), se aprecia que los resultados obtenidos mediante éste último siguen la misma evolución y se adaptan al método comparativo, sin ser los resultados finales significativamente mayores. La diferencia entre ambos métodos para el caso de pieza infinita es ínfima a partir de factores de forma de 7. El mayor porcentaje de diferencia puede encontrarse sobre factores de forma de 6, con un 17% de variación entre el resultado que ofrece el TLS frente al CLD.

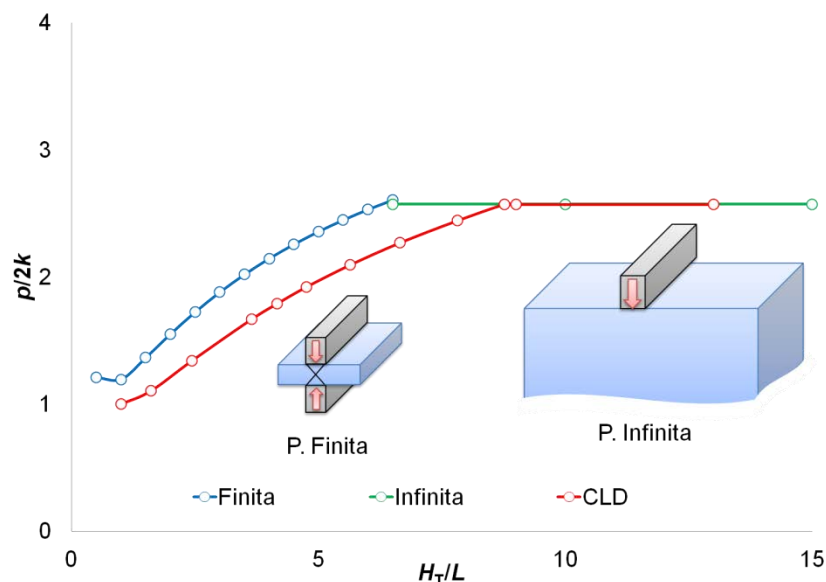


Figura 5.18: Comparativa resultados Campo de Líneas de Deslizamiento y Modelo Modular

Al ser el TLS mediante BRT, en su base, una simplificación del estudio de la deformación, los resultados arrojados son ligeramente mayores, sobretudo en el caso de pieza finita, sin llegar a ser esta diferencia excesiva en ninguno de los casos. En todos los valores posibles del FF ( $H/L$ ), esta diferencia nunca es mayor de un 17%, siendo este 17% para valores extremos, por lo que en general el método presentará un porcentaje menor al 10%. Es posible realizar una comparativa con diversos estudios que aplican el TLS a otros procesos de fabricación y presentan, en algunos casos, porcentajes mayores [11-15], por lo que el presente modelo modular resulta bastante aceptable.

No obstante, la zona correspondiente a la mayor diferencia entre ambos modelos, corresponde con las piezas finitas. Se considera que este tipo de piezas se trabaja con menor frecuencias en procesos por indentación ya que, debido al espesor

reducido de la pieza, se podría estar extralimitando el proceso de indentación como tal, llegando a abarcar procesos como la embutición o el cizallado, procesos mediante los que se elaboran, comúnmente, piezas del tipo laminas de material y que requieren condiciones de contorno diferentes a las estudiadas para un proceso de indentación.

Como conclusión general de este capítulo, se puede establecer, por tanto, que el TLS mediante su aplicación de tres módulos, compuestos cada uno por dos BRT, resulta un método de resolución preciso y relativamente sencillo de aplicar en comparación con los otros métodos considerados.

## Referencias

- [1] G. W. Rowe, *Conformado de los metales*. Bilbao (España): Urmo, 1972.
- [2] W. F. Hosford and R. M. Caddell, *Metal Forming: Mechanics and Metallurgy*. Cambridge (UK): Cambridge University Press, 2011.
- [3] R. Hill, *The Mathematical Theory of Plasticity*. U.K.: Oxford Classic Texts in the Physical Sciences, 1998.
- [4] J. Chakrabarty, *Theory of Plasticity*. Oxford (U.K.): Elsevier Science, 2006.
- [5] K. L. Johnson, "The correlation of indentation experiments," *Journal of Mechanichs and Physics of Solids*, vol. 18, pp. 115-126, 1970.
- [6] A. E. Giannakopoulos, P. L. Larsson, and R. Vestergaard, "Analysis of Vickers Indentation," *International Journal of Solids Structures*, vol. 31, pp. 2679-2708, 1994.
- [7] C. L. Woodcock and D. F. Bahr, "Plastic zone evolution around small scale indentations," *Scripta Materialia*, vol. 40, pp. 783-788, 2000.
- [8] N. Topcu, "Numerical, analytical and experimental analysis of Indentation.," Ph. D Ph.D. Thesis, Department of Mechanical Engineering, Midlle East Technical University, Turkish, 2005.
- [9] Z. Song and K. Komvopoulos, "Elastic-plastic spherical indentation: Deformacion regimes, evolution od plasticity and hardening effect," *Mechanics of Materials*, vol. 61, pp. 91-100, 2013.
- [10] J. Fluhrer, *Deform. Design Environment for Forging. User's Manual*. Ohio: Scientific Forminf Technologies Corporation, 2010.
- [11] T. Altinbalik and O. Ayer, "Effect of die inlet geometry on extrusion of clover sections through curved dies: Upper Bound analysis and experimental verification," *Transactions of Nonferrous Metals Society of China*, vol. 23, pp. 1098-1107, 2013.
- [12] B. C. Hwang, S. J. Hong, and W. B. Bae, "An UBET analysis of the non-axisymmetric extrusion/forging process," *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 111, pp. 135-141, 2001.
- [13] B. C. Hwang, H. I. Lee, and W. B. Bae, "A UBET analysis of the non-axisymmetric combined extrusion process," *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 139, pp. 547-552, 2003.
- [14] A. Parvizi and K. Abrinia, "A two dimensional Upper Bound Analysis of the ring rolling process with experimental and FEM verifications," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 79, pp. 176-181, 2014.
- [15] S. Khoddam, A. Farhoumand, and P. D. Hodgson, "Upper-Bound analysis of axi-symmetric forward spiral extrusion," *Mechanics of Materials*, vol. 43, pp. 684-692, 2011.

# CAPÍTULO 6

---

## ESTUDIO Y ANÁLISIS COMPARATIVO MEDIANTE EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

*Análisis, Desarrollo y Validación del Método del Límite Superior en Procesos de  
Conformado por Indentación*

---





## Índice Capítulo 6

6.1 Método de Elementos Finitos. Introducción.....	6.1
6.2 DEFORM.....	6.4
6.2.1 Pre-procesador .....	6.6
6.2.2 Simulación .....	6.6
6.2.3 Post-procesador.....	6.7
6.2.4 Unidades.....	6.7
6.3 Conformado por indentación implementado en DEFORM .....	6.8
6.3.1 Estudio de mallado óptimo .....	6.9
6.3.2 Estudio del tamaño de la pieza: Finita o Infinita.....	6.17
6.4 ABAQUS FEA .....	6.21
6.5 Conformado por indentación implementado en ABAQUS.....	6.23
6.6 Contrastación de resultados obtenidos mediante el MEF, CLD y TLS mediante BRT .....	6.23



## 6. ESTUDIO Y ANÁLISIS COMPARATIVO MEDIANTE EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

Con el fin de establecer el correcto funcionamiento del TLS mediante la aplicación modular de BRT, es necesario realizar un estudio y análisis comparativo de los resultados que se obtienen con otros métodos actuales, a fin de que permitan establecer las similitudes y discrepancias del modelo, así como demostrar la completa viabilidad del análisis para el estudio de esfuerzos en el proceso de indentación abarcado en la presente Tesis Doctoral.

La herramienta actualmente más utilizada para el análisis de tensiones en los procesos de fabricación, así como el medio de ejecución de estudios integrales, previos a la completa definición de la maquinaria necesaria en procesos de deformación plástica, y para prácticamente todos y cada uno de los detalles que rodean un conformado de dichas características, son los programas de métodos numéricos basados en el Método de Elementos Finitos (MEF).

Por ello, resulta de relevancia añadir a la presente investigación un estudio del proceso de indentación contemplado con esta herramienta y establecer las similitudes en la aplicación del TLS mediante BRT, con el fin de concretar la aptitud del método.

### 6.1 Método de Elementos Finitos. Introducción.

El *Método de Elementos Finitos* (MEF) fue desarrollado durante la década de los 50 del siglo pasado, con el propósito de ser aplicado a problemas de deformación elástica lineal, que a su vez tienen gran aplicación en la resolución de análisis estructurales [1, 2]. Posteriormente se extendió a la resolución de problemas elástico-plásticos, durante la década de los 60 del mismo siglo [3, 4].

El desarrollo moderno se inició gracias a la formulación de la aeroelasticidad (ciencia que estudia la interacción entre las fuerzas inerciales, elásticas y aerodinámicas) discreta en forma matricial, de Collar y Duncan, en 1930 [5], cuya representación y terminología para discretizar sistemas dinámicos sigue en uso hoy día. Posteriormente, es Argyris [6] quien unifica los métodos de esfuerzo y desplazamiento utilizando para ello teoremas de energía dual, desarrollando métodos matriciales de análisis de estructura y sistematizando el concepto de ensamblado de

ecuaciones para sistemas estructurales mediante conceptos elementales. Los principios de la energía jugarán un papel importante en el desarrollo del MEF.

El primer tratamiento de elementos bidimensionales se llevó a cabo en 1959 cuando Turner propone el método de la rigidez directa (conocido por sus siglas en inglés como DSM, *Direct Stiffness Method*), que resultó ser la implantación informática de lo que hoy se conoce como el MEF [7]. Los datos procedían de las matrices de rigidez planteadas para elementos del tipo barra, viga y bidimensionales triangulares y rectangulares en tensión plana.

A partir de entonces se suceden pequeñas modificaciones en el método que propician la evolución hacia el *Método de la Fuerza Clásica* (MFC), (Classical Force Method con sus correspondientes siglas en inglés CFM) en 1970, así como la extensión que se produce del método a problemas tridimensionales, con la aparición de una matriz tetraedro rígida, gracias a estudios realizados por Martin en 1961, Gallagher en 1962 [8] y Melosh en 1963 [9]. Los casos asimétricos fueron considerados por Clough, Rashid y Wilson en 1965 [10], siendo en el mismo año cuando Archer [11] desarrolló la matriz consistencia/masa, considerando en ella el análisis dinámico.

El MFC llega a su perfeccionamiento con la implementación, a nivel de producción, de los programas de elementos finitos [12, 13].

Hoy día es posible resolver la práctica totalidad de no-linealidades que abarcan la forma de la pieza a deformar y las propiedades del material utilizado en dicho proceso, así como obtener predicciones precisas de tensión, deformación, velocidad de deformación, distribución de temperatura, etc. Estas predicciones se utilizan para determinar si el material conformado soportará dichas tensiones o si bien se producirá el fallo mediante aparición de grietas debido a la tracción o cizalladura catastrófica durante el proceso.

La información sobre presiones superficiales, esfuerzos de tracción y cargas globales que se obtienen mediante la aplicación de este método, pueden utilizarse como información de entrada para un análisis elástico o para el diseño de la herramienta de deformación. Los resultados de este análisis tan complejo proveen de información valiosa para desarrollar el control y la estrategia a seguir en el conformado de metales.

No muchos años atrás, en la mayoría de los análisis de elementos finitos se requerían grandes tiempos de cálculo y máquinas de cálculo considerables, pero esta situación se ha visto favorecida en las últimas décadas, demandando menos tiempo de cálculo y máquinas o computadores más asequibles. Aún así, existe un peligro inherente a la utilización de este tipo de métodos: el uso de este tipo de programas de cálculo sin una completa comprensión de los principios que soportan el desarrollo del problema y las limitaciones impuestas por las distintas hipótesis y estructura de análisis adoptadas [14]. En el Figura 6.1 se muestra la evolución esquematizada del MEF.

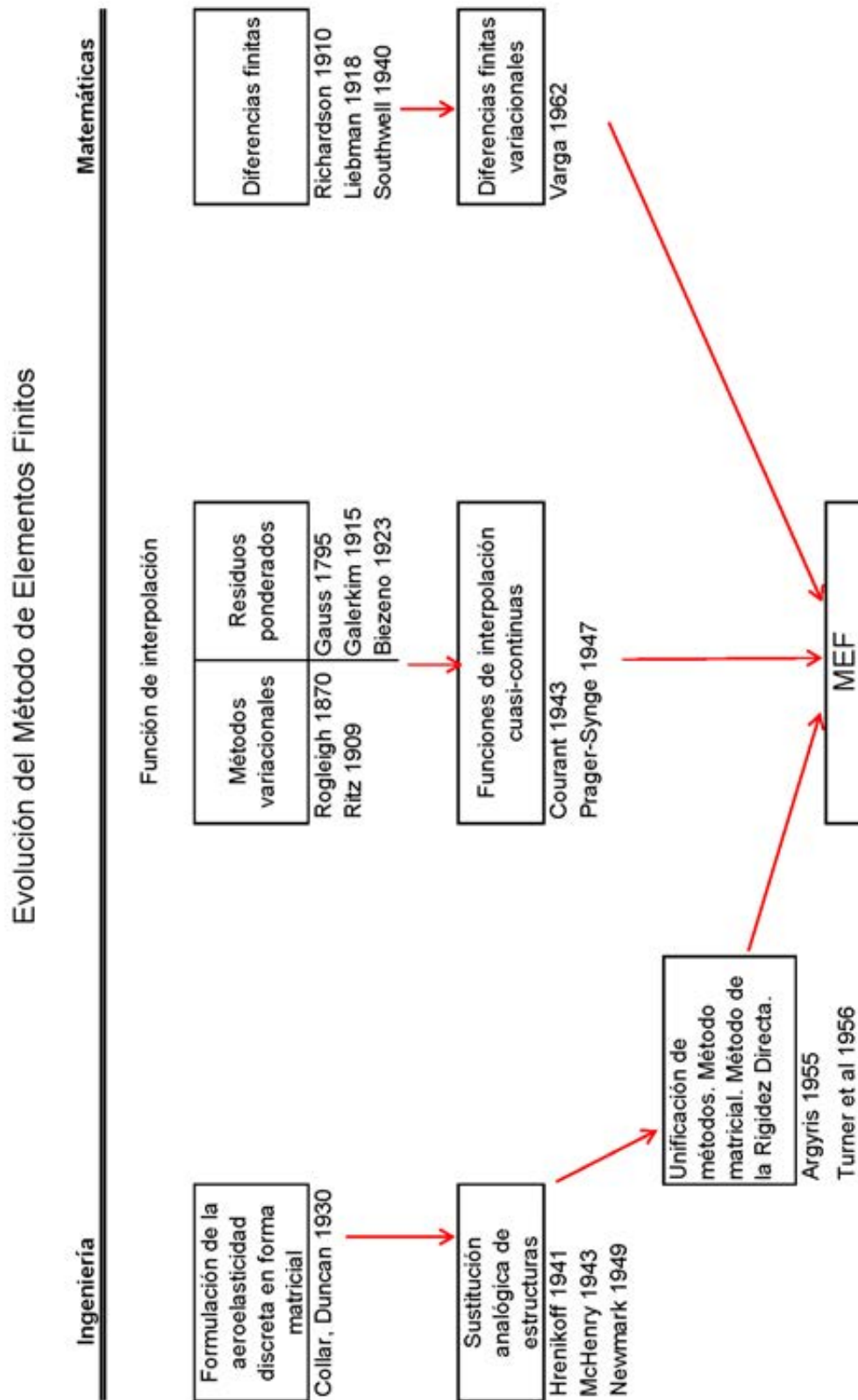


Figura 6.1: Árbol genealógico del Método de Elementos Finitos

Resulta incuestionable el parecido del MEF con el TLS, ya que el MEF se basa en métodos numéricos que dan valores aproximados de las incógnitas mediante la

discretización de puntos en el continuo. Se produce, por tanto, un proceso de modelado de un cuerpo mediante divisiones en un sistema equivalente de cuerpos más pequeños o unidades (elementos finitos), interconectados en puntos comunes a dos o más elementos y/o líneas de límite y/o superficies, que se denomina discretización. Las ecuaciones aritméticas reemplazan a las ecuaciones diferenciales que gobiernan los sistemas que se intentan resolver, y toman el nombre de ecuaciones de discretización, llegándose a ellas mediante diversas técnicas matemáticas, siendo las más comunes la aproximación directa, el método variacional, el método de residuos ponderados, el desarrollo en series de Taylor y el balance de energías, entre otros.

Es decir, el MEF, en lugar de resolver el problema para todo el cuerpo en una sola operación, formula las ecuaciones para cada elemento finito y las combina para obtener la solución de todo el cuerpo. La solución se referirá a la determinación de los desplazamientos en cada nodo y a las tensiones dentro de cada uno de los elementos que componen la estructura que se somete a las cargas aplicadas.

Como se puede apreciar, la estructura de resolución del problema tiene similitudes con la utilizada en el TLS, dentro de las características propias de cada método. Tanto es así que, según se obtiene de la bibliografía [14, 15], se plantea que uno de los métodos que pueden competir al MEF es el TLS, al igual que el Método de las Diferencias Finitas (MDF) y el Método de Elementos de Contorno (MEC).

Para la consecución del presente estudio, se han realizado las simulaciones pertinentes con los programas de elementos finitos DEFORM 2D y ABAQUS, detallados en el siguiente apartado. Estos programas mantienen la misma base de aplicación del MEF y su uso es similar, siendo ABAQUS más complejo debido a la mayor generalidad del campo de aplicación que abarca. DEFORM, en contraste, es un programa más específicamente diseñado para el estudio de los procesos de deformación plástica y, por tanto, su manejo y comprensión se simplifican considerablemente.

## 6.2 DEFORM

DEFORM es un programa de simulación basado en el MEF, destinado a analizar los distintos procesos que incluyen los efectos de la deformación, así como de la temperatura, procesos que suelen aparecer en el conformado plástico y, muy a menudo, en la industria. Mediante la colaboración de la Universidad Nacional de Educación a Distancia, concretamente con el Departamento de Ingeniería de Construcción y Fabricación, se ha podido tener acceso a este programa para implementar el estudio considerado a continuación, aprovechando la estancia que la doctoranda ha realizado en dicho Departamento

DEFORM está ideado para reducir los costes derivados de diseño y rediseño de herramientas y procesos o líneas de procesos, a la vez que mejora el diseño de éstos y reduce en costes de material y producción. Al mismo tiempo, acorta el tiempo de salida de un nuevo producto al mercado.

Se ha elegido este programa de elementos finitos porque, en comparación con los demás, DEFORM ya se encuentra adaptado al modelado por deformación, es decir, a los procesos de conformado plástico que interesan para el estudio llevado a cabo sobre forja por indentación. Además de presentar un entorno virtual más sencillo, lo que permite al usuario enfocar el trabajo en el proceso de conformado, sin necesidad de aprender un extenso sistema y/o lenguaje de programación. Una de las ventajas que se derivan de ello es la incorporación del mallado automático, optimizado para problemas con grandes deformaciones.

El sistema de elementos finitos DEFORM se compone de varios paquetes:

- DEFORM 2D: Módulo utilizado para modelizar en casos de deformación plana y axisimetría, con un modelo en dos dimensiones simplificado, incluyendo todas las capacidades de análisis tanto para producción como para entornos de investigación.
- DEFORM 3D: Este módulo es capaz de modelizar complejos patrones de flujo de material en tres dimensiones. Se utiliza para analizar aquellos procesos que no pueden ser simplificados a un modelo de dos dimensiones.
- DEFORM PC: Módulo capaz de modelar problemas en casos de deformación plana y axisimetría en dos dimensiones. Muy recomendable para realizar estudios que no requieran resoluciones exhaustivas.
- DEFORM PC pro: Al igual que el módulo anterior, es capaz de modelar problemas en casos de deformación plana y axisimetría en dos dimensiones, incluyendo la mayoría de los análisis posibles mediante el módulo DEFORM 2D
- DEFORM HT: Este módulo se encuentra añadido a los módulos DEFORM 2D y 3D, como complemento a las capacidades de análisis de deformación, permitiendo modelar los efectos de la temperatura, así como incluir endurecimiento, distorsión, tensión residual y material con cierto contenido en carbono.

Igualmente, trabajar con DEFORM es interesante porque permite una modelización acoplada de la deformación y la transferencia de calor, tanto para simulaciones en frío, caliente o como para procesos de forja en caliente, en todo tipo de productos. Además, incluye una base de datos de materiales que comprende diversas tipologías, desde aleaciones comunes hasta super-aleaciones, incluso permitiendo al usuario definir e introducir en la base de datos algún material que no esté previamente definido, o cambiar los materiales existentes para aportar nuevas características que se consideren oportunas.

De cara a la solución del problema o simulación, permite obtener información sobre la fluencia del material, el llenado de la matriz o molde, las cargas de forja, las

tensiones existentes en las matrices de conformado, la fluencia de grano, los posibles defectos en la formabilidad de la pieza y las fracturas dúctiles que puedan ocurrir.

DEFORM puede ser utilizado para analizar la mayoría de los procesos de conformado plástico. Permite distinguir entre elementos rígidos y material deformable, definiendo y analizando aquellos componentes que se hayan descrito como deformables. Como enfoque general, primero se definirá la geometría y el material de la pieza inicial que se verá sometida a deformación y, posteriormente, de forma secuencial, se simulará cada proceso que se vea aplicado a dicha pieza inicial.

A continuación se detallan los tres componentes principales en los que se verá dividido el diseño y análisis del proceso de conformado simulado:

### 6.2.1 *Pre-procesador*

En este primer paso del programa, se creará la pieza objeto de estudio, permitiendo, también, realizar un conjunto o montaje de diversas piezas y modificar los datos necesarios para realizar el análisis en la simulación. Una vez preparado el diseño, se genera la base de datos correspondiente.

Los pasos a seguir, dentro de este apartado, son los siguientes:

- Descripción del objeto: geometría, mallado, temperatura, material, contactos, rozamientos, etc.
- Datos del Material: comportamiento del material.
- Condiciones de interacción del objeto: descripción del contacto, rozamiento, transferencia de calor, etc.
- Controles de simulación: paso importante, porque describirá el método que utilizará el programa para resolver el problema en cuestión y comprometerá los resultados. Se establecen datos como el número de pasos o *steps* en los que se dividirá el proceso y las condiciones del entorno, entre otras.
- Datos del material internamente: utilizado en caso de existencia de un cambio de fase de material, mediante un proceso de calentamiento o temperatura elevada producida por el mismo proceso de conformado. Por ejemplo, la transformación que puede ocurrir de austenita a perlita y demás fases en una aleación férrea.

### 6.2.2 *Simulación*

En este segundo paso, DEFORM efectuará los cálculos numéricos necesarios para analizar el proceso objeto de estudio y volcará los resultados en la base de datos previamente generada en el pre-procesador. El programa lee la base de datos, realiza los cálculos y añade los resultados a la misma, creando de esta forma un único archivo con toda la información pertinente. Es el mismo programa quien regenera la malla en caso de que fuera necesario, con la creación de malla automática.



De cara al usuario, mientras la simulación está siendo procesada, se muestra por pantalla la información relativa al estado de dicha simulación, incluyendo cualquier error que pueda producirse. Los archivos generados durante la simulación, que siguen la evolución de la misma, son los mostrados a continuación:

- Archivos “.log”: Aportan información general del tiempo de comienzo y finalización de cada *step*, del remallado (en caso necesario) y los mensajes de error si la simulación se interrumpe de forma inesperada.
- Archivos de mensajes: Estos archivos contienen más información que los anteriores, mostrando datos detallados del comportamiento de la simulación y también pueden contener información acerca de cualquier parada abrupta que pueda ocurrir durante el proceso.

### 6.2.3 Post-procesador

Mediante esta fase, el usuario podrá trabajar con los resultados de la simulación, leer los distintos datos numéricos generados y visualizarlos de forma gráfica en los distintos formatos que permite DEFORM.

### 6.2.4 Unidades

DEFORM permite trabajar utilizando tanto las unidades de medida del Sistema Internacional (SI), como el sistema de unidades anglosajón. Las unidades de medida deben establecerse al comienzo del diseño de la pieza o proceso, siendo imposible un posterior cambio de ésta.

Tabla 6.1: Sistema de Unidades del DEFORM

Magnitud	S.I.	Sistema Anglosajón
Tiempo	s	s
Longitud	mm	in
Área	mm <sup>2</sup>	in <sup>2</sup>
Volumen	mm <sup>3</sup>	in <sup>3</sup>
Fuerza	N	Klb
Energía Mecánica	N·mm	Klb·in
Presión	MPa	KSI
Energía Calorífica	N·mm	BTU
Temperatura	°C	°F

En la Tabla 6.1 se muestran los sistemas de unidades con el que trabaja el programa de simulación

### 6.3 Conformado por indentación implementado en DEFORM

Para implementar el estudio del proceso de indentación mediante el MEF, se ha contado con la posibilidad de utilizar el DEFORM 2D y 3D. Existe la opción de trabajar con DEFORM 2D en deformación plana y, conociendo la longitud que el programa establece a esta profundidad, que mantendrá con fluencia estable, se trabajará fundamentalmente con su versión en 2D. No obstante, no se descarta por completo su versión en 3D. La principal desventaja de trabajar en la versión en 3D es el incremento que se produce en el tiempo de resolución de los casos estudiados, por lo que se relega esta opción del programa a las comprobaciones finales.

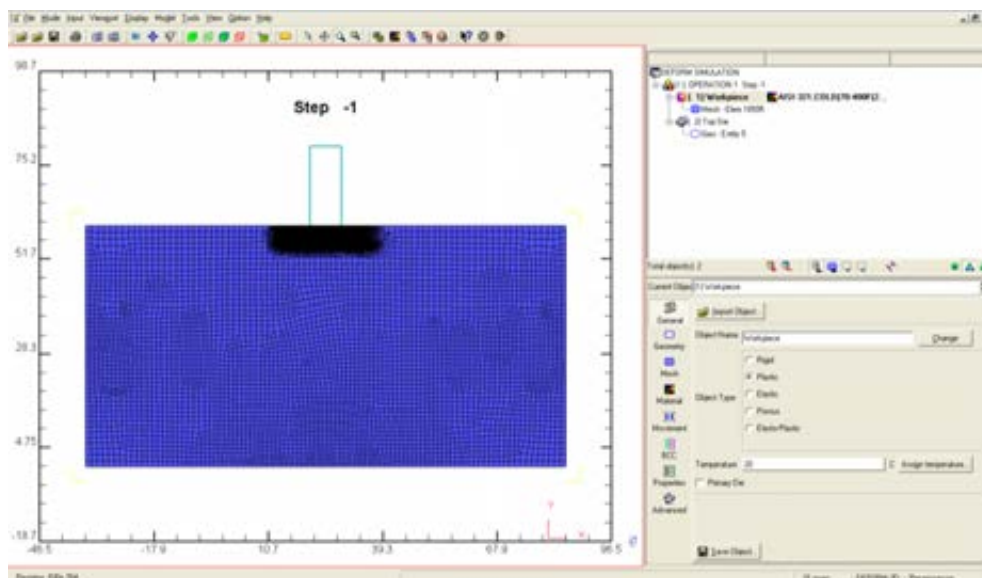


Figura 6.2: Entorno y pieza en DEFORM 2D

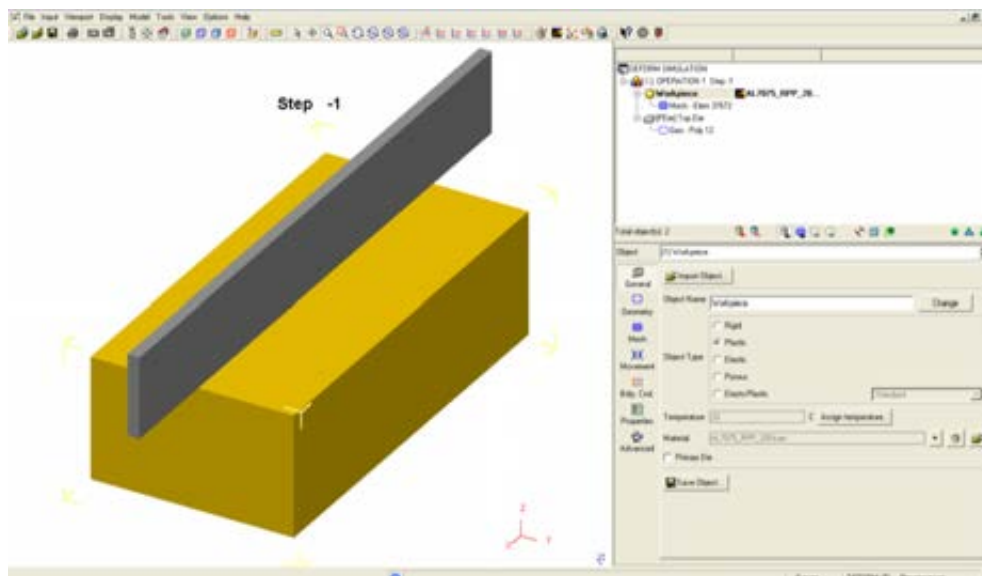


Figura 6.3: Entorno y pieza en DEFORM 3D

En la Figura 6.2 y Figura 6.3 se aprecian las diferencias existentes, tanto en el planteamiento de la pieza y el proceso, como en el entorno, de los módulos 2D y 3D.

### 6.3.1 Estudio de mallado óptimo

Aparte del conocimiento preciso del programa de elementos finitos que se vaya a utilizar para la ejecución del proceso de indentación y la comparativa de resultados con el TLS y el CLD, con el fin de realizar una interpretación correcta de dichos resultados y obtener una comparativa veraz de los datos, resulta necesario realizar un estudio del mallado implementado en la pieza objeto de estudio.

Una malla incorrecta puede arrojar unos resultados incoherentes debido a imperfecciones en dicha malla o a incompatibilidades con la geometría del proceso. Es necesario implementar diferentes mallados y realizar una comparativa de resultados que resultan entre ellos, a fin de hallar la repetitividad del proceso y asegurar que son dichos resultados son los más cercanos a la realidad, dentro de las posibilidades del problema analizado.

Desde la implantación del MEF, se han sucedido distintos y numerosos estudios sobre los distintos mallados posibles que se pueden incorporar en los distintos procesos, intentando siempre ofrecer la malla óptima y más adaptada, que ofrezca tanto unos resultados precisos como, a su vez, ser capaz de no incrementar los tiempos de resolución de la simulación. Claros ejemplos de estos estudios pueden encontrarse en la bibliografía referenciada [16-19].

Por tanto, para el análisis del proceso de indentación estudiado, será necesario la realización de un estudio de mallado. Para ello se realizará una serie de simulaciones con una pieza y un punzón idealizados, con el fin de establecer el mallado adecuado para el proceso.

En DEFORM 2D, el usuario tiene la posibilidad de definir los parámetros del mallado de acuerdo a la densidad de la malla. Ésta se refiere al tamaño de elementos que se generarán dentro del contorno de la pieza, y se define mediante el número de nodos por unidad de longitud, generalmente a lo largo del borde de la geometría del objeto.

Tabla 6.2: Características malla automática

Número de elementos	1000
Espesor del elemento	4 mm
Relación de tamaño	3
Nº de ventanas de mallado	0
Criterio de remallado	No (Automático)

La primera simulación se lanza con un mallado automático, como se aprecia en la Figura 6.4, con las características reflejadas en la Tabla 6.2, obteniéndose los resultados que aparecen en la Figura 6.5. La pieza se muestra en la Figura 6.4, con unas dimensiones de 68x32 mm, y un punzón de 4 mm de ancho, que penetrará hasta una profundidad de 3 mm, desde la superficie de la pieza donde descansa.

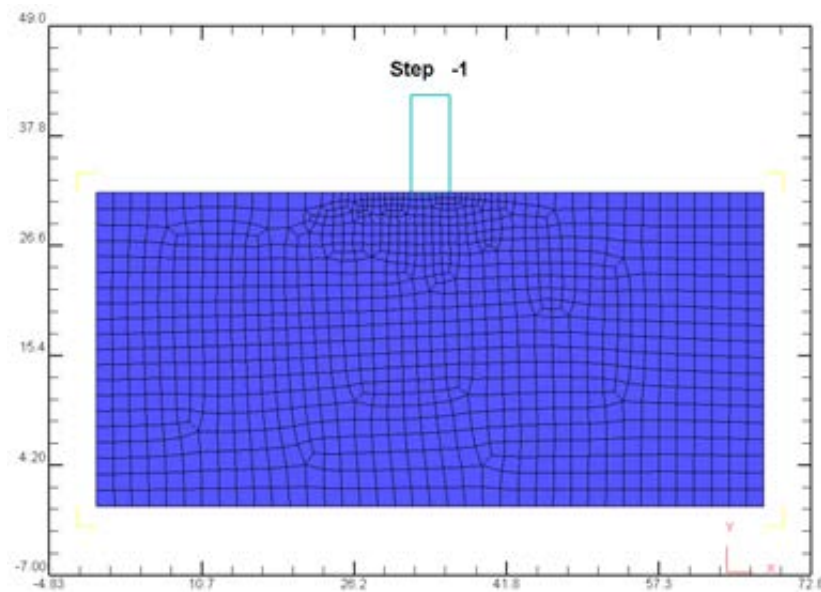


Figura 6.4: Pieza estándar para estudio de mallado

Los picos presentes en la gráfica anterior se deben a un mallado demasiado grueso o basto, definido para una región con efectos superficiales localizados, como es el caso de una indentación. También hay que tener en cuenta que una malla con una gran densidad, ofrecerá un incremento en la precisión de los resultados pero, a su vez, incrementará el tiempo requerido para resolver el problema. El tiempo se incrementará proporcionalmente al número de nodos que aparezcan en la malla.

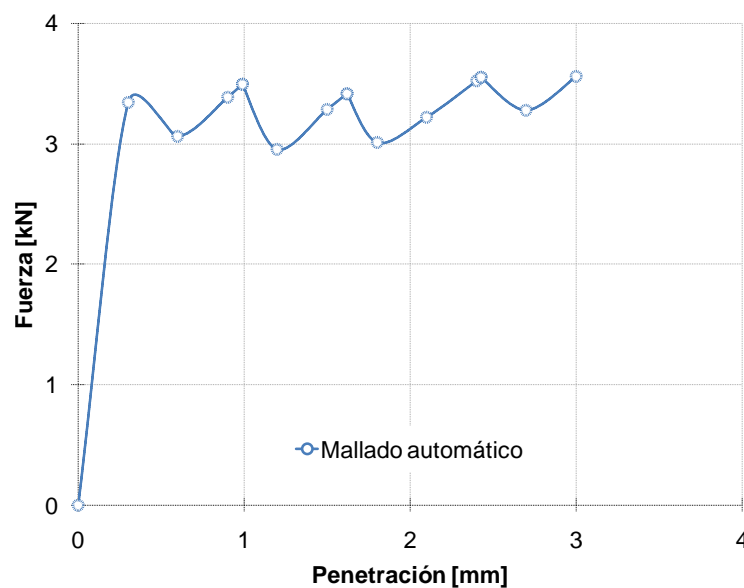


Figura 6.5: Resultados obtenidos del mallado automático

Por tanto, se procede al suavizado de dichos picos mediante la variación del mallado anterior, como se muestra en la Tabla 6.3, arrojando los resultados presentes en la Figura 6.6.

Tabla 6.3: Características del segundo mallado

Número de elementos	1000
Espesor del elemento	4 mm
Relación de tamaño	3
Nº de ventanas de mallado	0
Criterio de remallado	Si (Remallado a 3 steps)

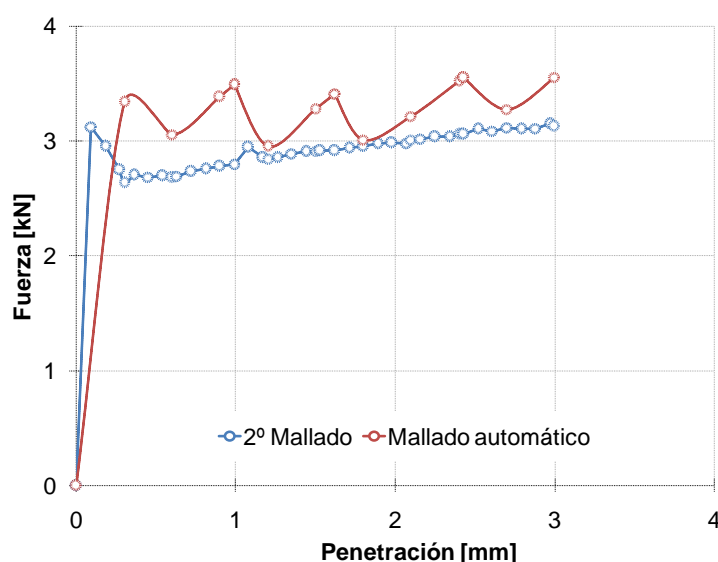


Figura 6.6: Comparativa 2º mallado y mallado automático

Se aprecia la reducción obtenida de las discontinuidades y una mayor linealidad. No obstante, se debe continuar afinando la malla en busca de la repetibilidad de los resultados antes comentada. Una vez conseguida dicha repetibilidad, se podrá establecer la malla como óptima

Para seguir optimizando los resultados, se opta por introducir el concepto de ventana de mallado. De esta forma, podremos implantar un mallado más fino alrededor del punzón, sin necesidad de aumentar el número de elementos de la pieza global y, por consiguiente, no saturando en exceso las simulaciones. El siguiente mallado aparece reflejado en la Tabla 6.4 y la Figura 6.7:

Tabla 6.4: Características del tercer mallado

Número de elementos	1000
Espesor del elemento	4 mm
Relación de tamaño	3
Nº de ventanas de mallado	2 (Proporción 1/3)
Criterio de remallado	Si (Remallado a 3 steps)

La proporción, en la Tabla 6.4, indica que cada elemento perteneciente a la segunda ventana de mallado, será 3 veces mayor que un elemento perteneciente a la primera ventana de mallado. Así, se obtienen los siguientes resultados en la Figura 6.8

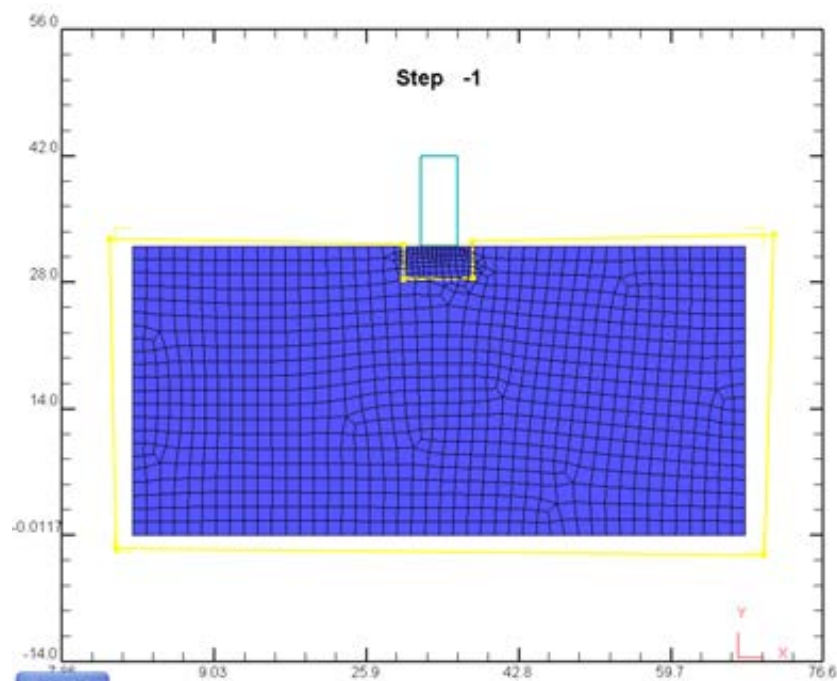


Figura 6.7: Ventanas de mallado

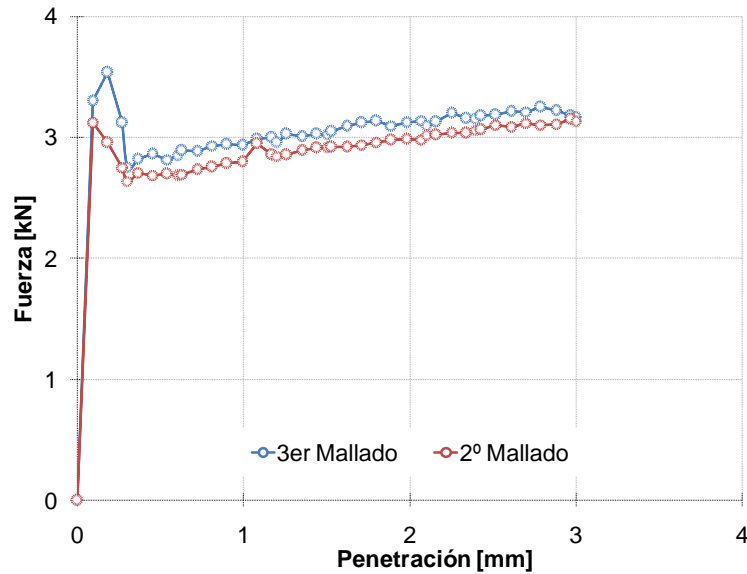


Figura 6.8: Comparativa del 2º y 3º Mallado

Se produce un ligero aumento de los resultados, pero la gráfica tiende a ser más homogénea, presentando menos picos que la anterior.

Se continúa con el estudio del mallado, cambiando nuevamente la proporción de las ventanas de mallado a 1/10, obteniendo los siguientes resultados de la Figura 6.9.

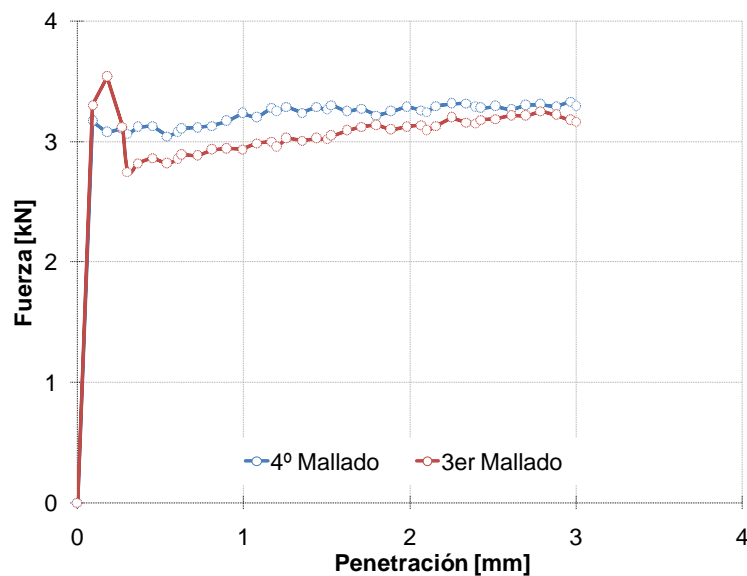


Figura 6.9: Comparativa entre el 4º y 3º mallado

Se aprecia que el pico que se producía al inicio de la gráfica, entre una penetración de 0 y 0,5, desaparece. Ahora, con una proporción de 1/20, los resultados son los expuestos en la Figura 6.10.



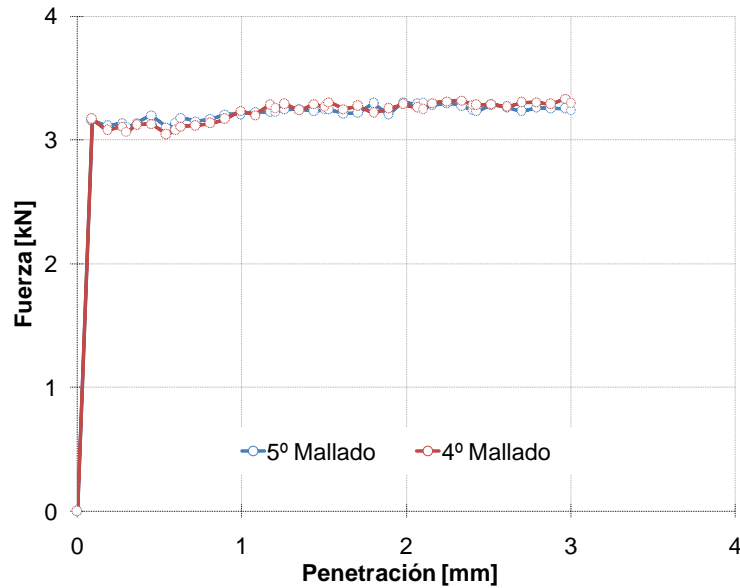


Figura 6.10: Comparativa entre el 5º y el 4º mallado

En el gráfico anterior se aprecia por primera vez una mayor repetibilidad de los resultados. Estos varían ligeramente debido al propio método de cálculo del DEFORM 2D, pero se aprecia que los resultados vienen a ser del mismo orden y presentan la misma linealidad.

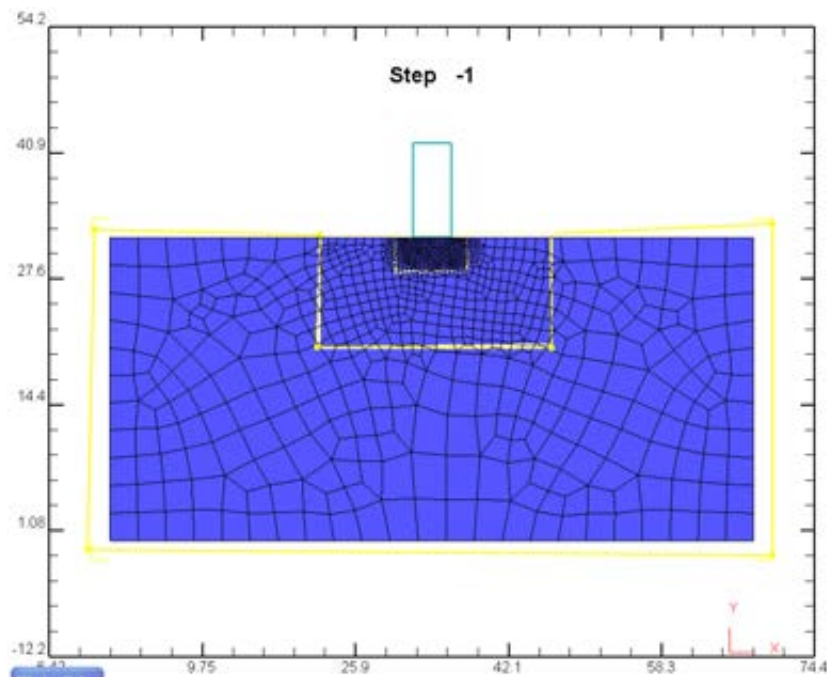


Figura 6.11: Incorporación de la tercera ventana de mallado

Con el fin de no olvidar ninguna forma con la que fuese posible optimizar el resultado anterior, se introduce una nueva ventana de mallado para incorporar una transición más suave, con la relación 1/5/20 como se muestra en la Figura 6.11, obteniéndose resultados de la Figura 6.12, apreciando que no sería necesaria la



introducción de una nueva ventana de mallado, ya que los resultados no se verían incrementados, ni reducidos, ni presentarían una evolución mejor.

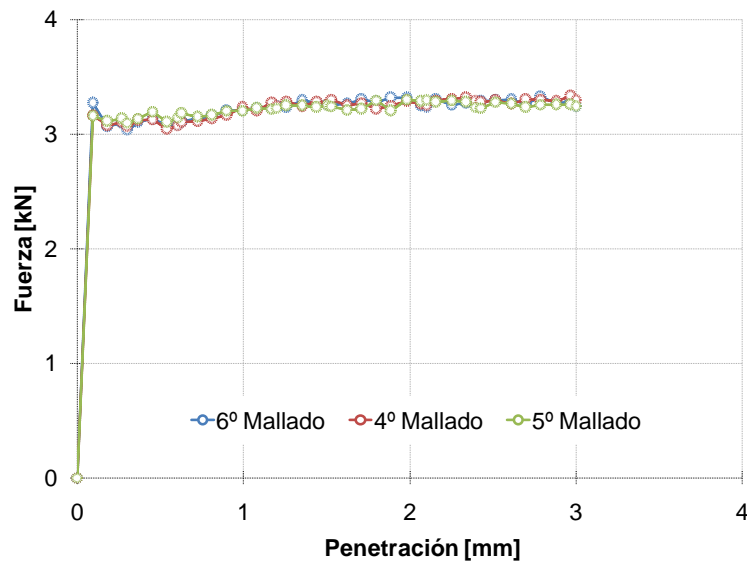


Figura 6.12: Comparativa entre los mallados 4º, 5º y 6º

Centrándose ahora en la variación del número de elementos y basándose la nueva malla en la 5ª malla, se incrementa el número de elementos (Figura 6.13), como última opción, en 5000 y 10000 elementos consecutivamente.

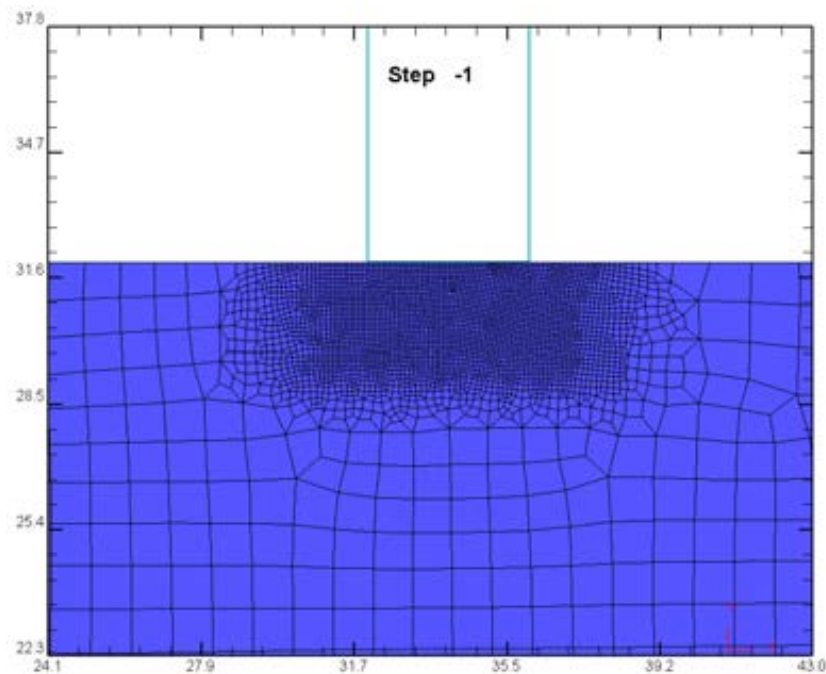


Figura 6.13: Aumento del número de elementos

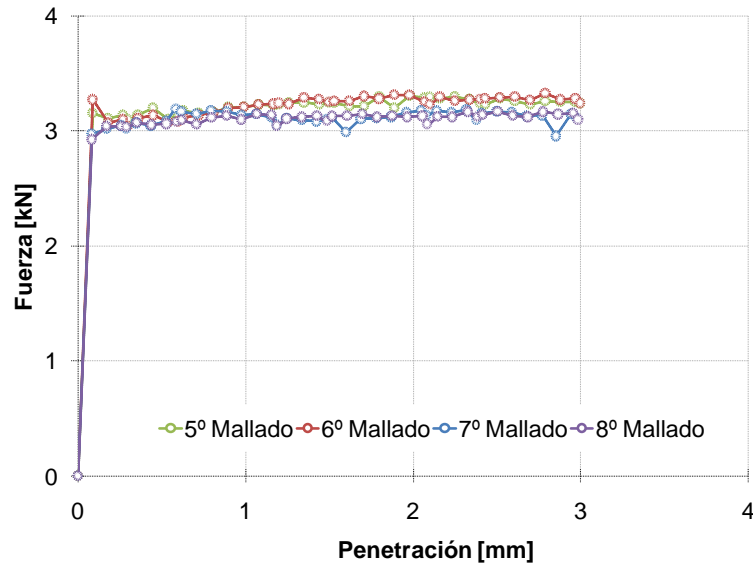


Figura 6.14: Comparativa entre mallado 5°, 6°, 7° y 8°

En la Figura 6.14 se aprecia cómo los resultados se reducen levemente y presentan una evolución más lineal, repitiéndose los resultados para los mallados 7 y 8. Por tanto, para realizar las simulaciones con las que comparar el modelo modular propuesto, se mantendrán los últimos parámetros incorporados, en la medida de lo posible (a veces no será posible mantener la densidad del mallado debido a la propia incompatibilidad del programa para soportar tantos elementos), adaptándola a las sucesivas piezas de estudio, Los valores de estos parámetros son los reflejados en la Tabla 6.5.

Tabla 6.5: Características del 7º mallado

Número de elementos	5000
Espesor del elemento	4 mm
Relación de tamaño	3
Nº de ventanas de mallado	2 (Proporción 1/20 ó 1/10)
Criterio de remallado	Si (Remallado a 3 steps)

Por último, debido a esa ligera variación en los resultados, se opta por volver a incrementar el número de ventanas de mallado, implementando los parámetros de la tabla anterior, para asegurar que los resultados, dadas las nuevas condiciones, no varían. Por ello, se adaptan 3 ventanas de mallado con proporción 1/7/20, demostrándose en la Figura 6.15 que, efectivamente, los resultados siguen siendo homogéneos, dentro de la posible variabilidad resolutive del programa en cuestión.

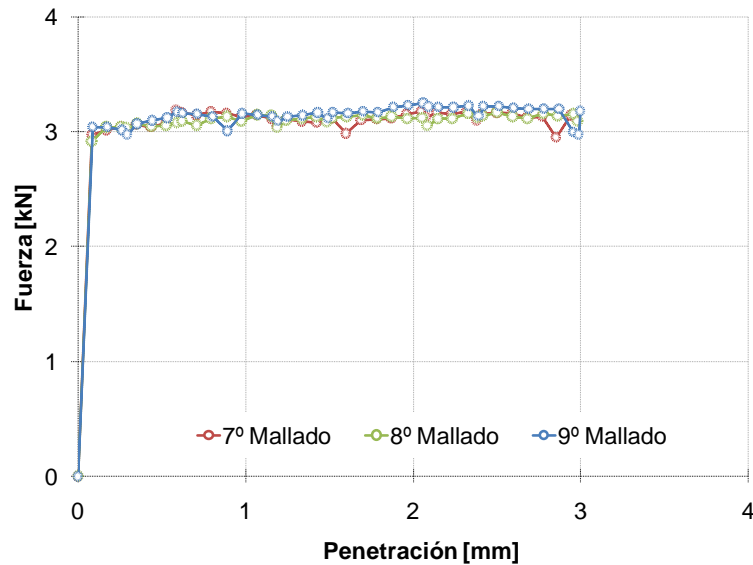


Figura 6.15: Comparativa mallados 7°, 8° y 9°

### 6.3.2 Estudio del tamaño de la pieza: Finita o Infinita

Se plantean simulaciones con piezas de altura considerablemente mayor al ancho del punzón, con el objetivo de asimilar una indentación a una pieza infinita, por lo que se ha considerado apropiado denominar a este tipo de piezas, piezas infinitas, pudiéndose apreciar que se produce un cambio en la gráfica a partir de cierta penetración (Figura 6.16).

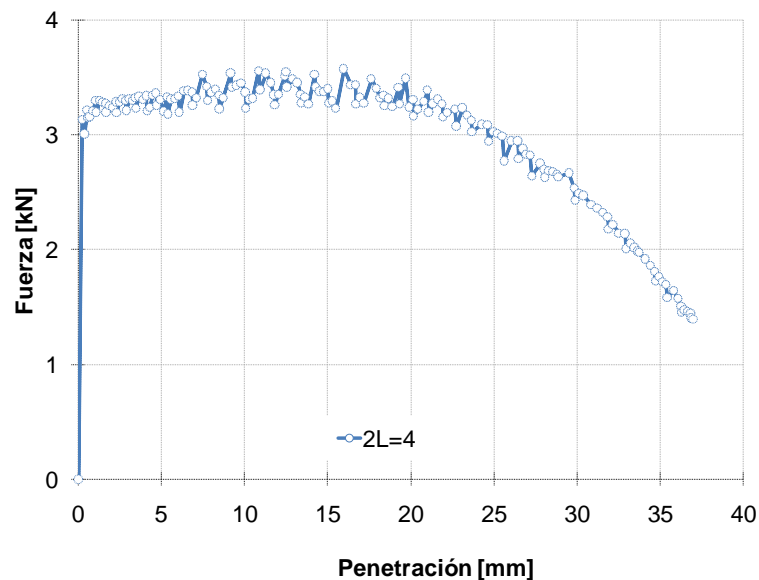


Figura 6.16: Penetración profunda a pieza infinita con punzón con ancho 4 mm

Realizando un estudio sobre el cambio de comportamiento en la gráfica, se simulan punzones de distintos anchos ( $2L=2, 4, 6, 8$  y  $10$ , siendo  $2L$  el ancho total del punzón), como el mostrado en la Figura 6.17, que vuelve a presentar el mismo

comportamiento. El esfuerzo se mantiene constante hasta que se alcanza cierta profundidad, a partir de la cual disminuye notablemente.

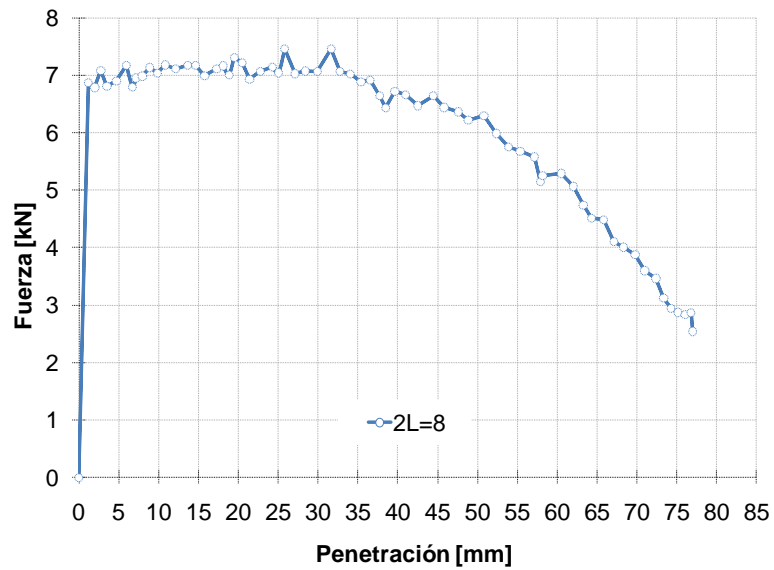


Figura 6.17: Penetración profunda a pieza infinita con punzón con ancho 8 mm

Realizando la conversión del esfuerzo a la relación adimensional  $p/2k$ , se puede establecer que el cambio en los resultados se produce con un factor de forma ( $H_T/L$ ) de 8, como se aprecia en la Figura 6.18 y la Figura 6.19.

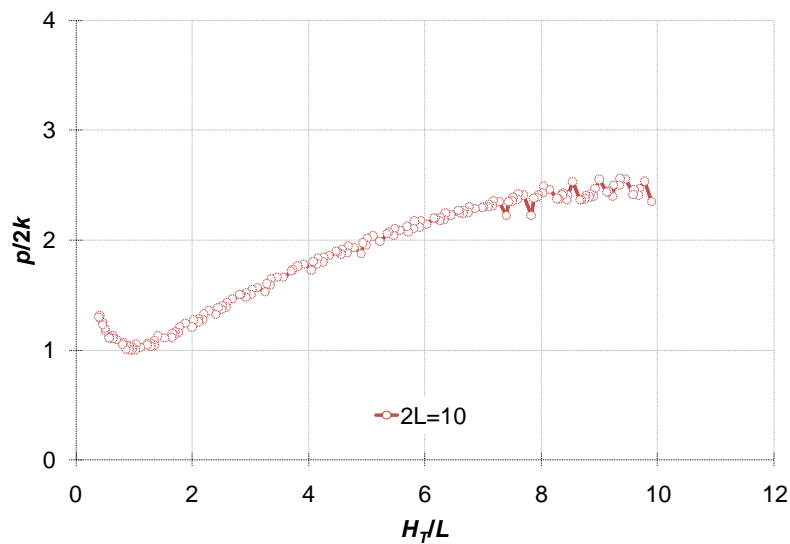


Figura 6.18: Evolución resultados para indentación profunda con punzón con ancho 10 mm

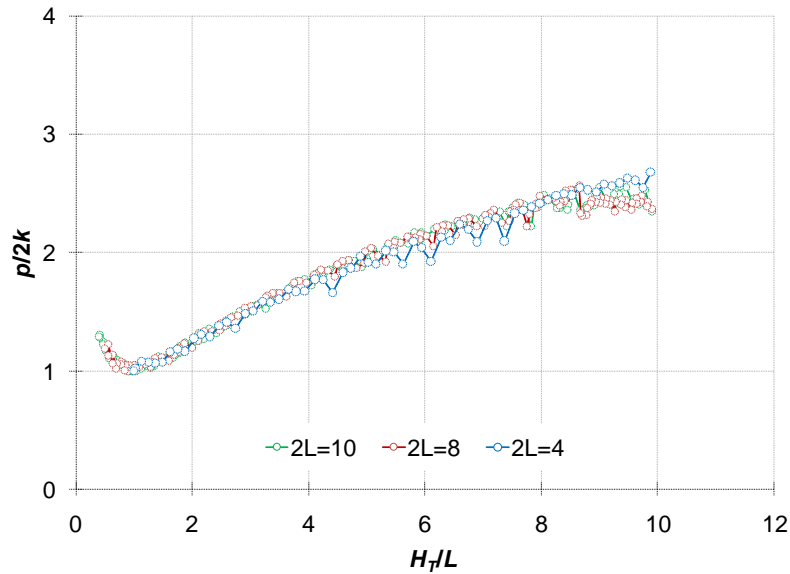


Figura 6.19: Superposición resultados indentación profunda distintos punzones

Por consiguiente, se realiza una clasificación de las piezas a indentar, según su altura, en piezas infinitas, cuando la relación  $H_T/L$  relativa al factor de forma es mayor que 8, y piezas finitas, cuando esta relación es menor que 8 (Tabla 6.6).

Tabla 6.6: Clasificación de piezas

Piezas	H/L
Finitas	<8
Infinitas	>8

Es importante precisar que también se ha llevado a cabo un estudio de la influencia del ancho de la pieza en cuanto a los resultados ofrecidos. Se han planteado ciertas simulaciones en Deform 2D para aclarar los resultados con distintas anchuras, para una pieza en las mismas condiciones normales que se han mantenido hasta el momento, en cuanto a mallado y condiciones de contorno.

Sabiendo que el punzón tiene un ancho de  $2L=4$ , se establece una pieza con una base total ( $B_T$ ) más de 10 veces mayor, con un valor de 50 mm. Por consiguiente, se plantean simulaciones desde una base de 50 hasta una de 10 mm, siendo los resultados los de la Figura 6.20.

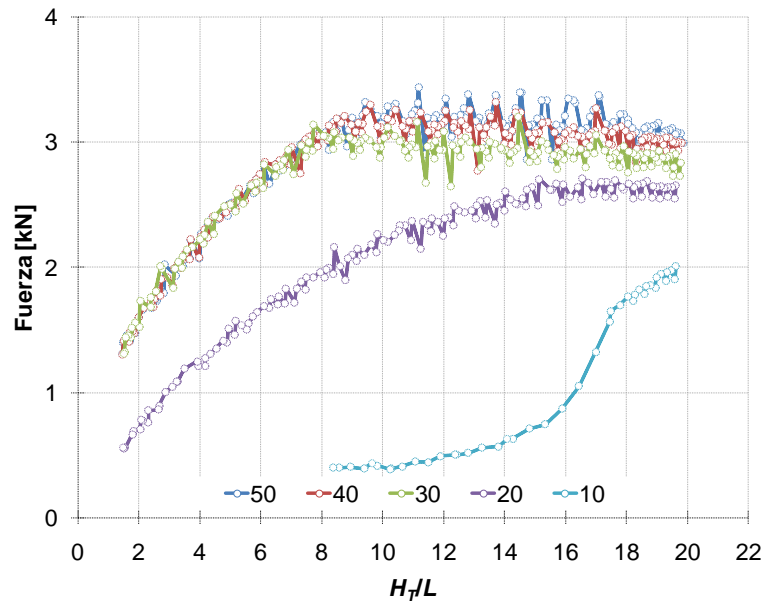


Figura 6.20: Resultados indentación con pieza de bases diferentes [mm]

Se aprecia que entre una base total de 50 y 30 mm los resultados son bastante parecidos, siendo coincidentes cuando se pierde la relación de altura considerada infinita, así como que ya a partir de un ancho inferior a 30 los resultados difieren considerablemente.

Esto es debido a que para anchuras inferiores a 30 no es posible llevar a cabo el proceso de indentación porque la pieza se deformaría de forma imprevisible, como se muestra en la Figura 6.21.

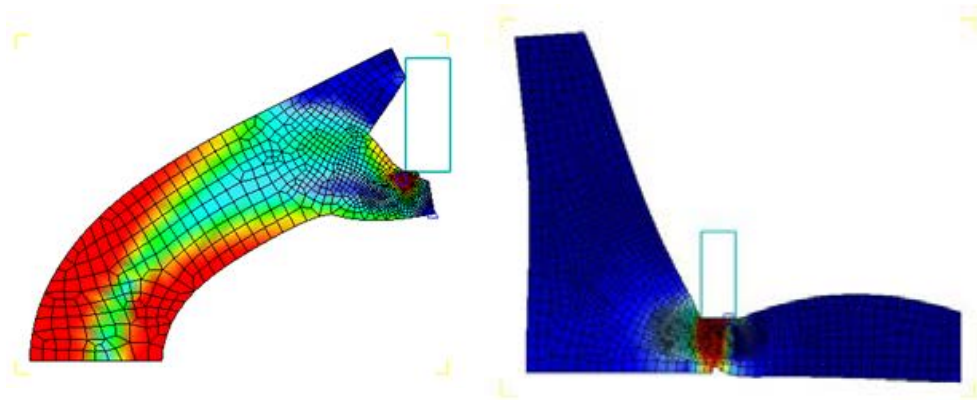


Figura 6.21: Deformación del proceso debido a una base de pieza insuficiente

Por tanto, aunque sí se producen cambios significativos en los esfuerzos, se descarta trabajar con piezas de una relación inferior a  $B_T=15L$  porque estas no deformarán correctamente sin el empotramiento de la pieza en una matriz de sujeción.

Ahora bien, en el tramo en el que se considera finita, los valores coinciden, pero en el tramo en el que se considera el trabajo de una pieza infinita, a partir de una  $H_T=9L$  aprox. se produce un distanciamiento en los valores de  $p/2k$ . No obstante, aunque los valores de  $p/2k$  se reducen, no sería necesario adaptar el modelo modular

con el que se trabaja actualmente puesto que no se obtendría una diferencia muy acusada.

#### 6.4 ABAQUS FEA

Adicionalmente, se ha trabajado con otro programa de elementos finitos con el fin de llevar a cabo una contrastación del método más amplia y profunda. Aprovechando igualmente otra segunda estancia de la doctoranda, mediante la colaboración con la Universidad de Skövde, Suecia, se tuvo acceso al software ABAQUS FEA (Finite Element Analysis), pudiendo de esta forma implementar una serie de casos de estudio y analizar los resultados obtenidos.

Desarrollado en 1978 y convencionalmente conocido como ABAQUS, es un programa compuesto por distintos módulos de análisis de elementos finitos e ingeniería asistida por ordenador, formado por cinco módulos.

- *ABAQUS/CAE (Complete ABAQUS Environment)*: usado tanto para el modelado como para el análisis de componentes mecánicos o montajes de los mismos y para el visualizado de los resultados del análisis con elementos finitos. Es el módulo identificado con el pre-procesador.
- *ABAQUS/Viewer*: analizador de elementos finitos de uso general que emplea para ello esquemas de integración implícita o tradicional.
- *ABAQUS/Explicit*: analizador de elementos finitos específico que emplea para ello esquemas de integración explícita para resolver sistemas no lineales con diversos contactos complejos bajo la influencia de cargas transitorias.
- *ABAQUS/CFD (Computational Fluid Dynamics)*: aplicación que proporciona capacidades avanzadas de resolución computacional sobre dinámica de fluidos con amplio apoyo para el pre y post-procesamiento en ABAQUS/CAE.
- *ABAQUS/Electromagnetic*: aplicación que resuelve problemas electromagnéticos avanzados.

Los módulos principales son el ABAQUS/CAE y el ABAQUS/Viewer. El ABAQUS/CAE consiste en un entorno completo que provee de una interfaz simple para la creación de modelos, su simulación, control y, posteriormente, la evaluación de los resultados derivados de ABAQUS/Estándar o Explicit. A su vez, este módulo se divide en submódulos donde, cada uno identifica un aspecto del proceso de modelado, ya sea definiendo la geometría, los materiales o generando la malla. Trabajando con todos los módulos, se va construyendo el modelo que se lanzará a los módulos de cálculo mencionados. Finalmente, el módulo de visualización, ABAQUS/Viewer, permite leer la base de datos creada en el análisis para estudiar los resultados obtenidos del análisis de elementos finitos.

Es un programa utilizado ampliamente en la industria de automoción, aeroespacial y en el desarrollo de nuevos productos industriales. Suele ser utilizado tanto en las instituciones académicas como en las de investigación, debido a su amplia

capacidad para el modelado de materiales y la gran capacidad del programa para ser personalizado.

También ofrece una extensa colección de capacidades multifísicas, lo que resulta muy atractivo para las simulaciones, a nivel de producción, en las que es necesario un análisis de distintos campos al mismo tiempo, aunque, debido a que inicialmente fue concebido para el análisis de comportamientos físicos no lineales, el módulo para este tipo de análisis es mucho más amplio que los demás

Todos los análisis realizados en ABAQUS consistirán de tres fases:

- *Modelado o Pre-procesamiento*: En esta etapa se crea el modelo que posteriormente se analizará en el siguiente módulo
- *Análisis por elementos finitos o Procesamiento*: Este paso produce los resultados que serán analizados posteriormente por el usuario
- *Post-procesamiento*: En esta etapa es donde el usuario analizará las imágenes, animaciones y datos en general de los archivos creados en la etapa anterior.

En la Tabla 6.7 se presentan las diferencias principales entre los dos solucionadores disponibles en ABAQUS

Tabla 6.7: Diferencias entre ambos solucionadores

Característica	Estándar	Explicit
Librería de Elementos	Sin limite	Únicamente aquellos apropiados para soluciones explicitas
Modelos de materiales	Modelos de deformación	Modelos de deformación y fractura
Solución	Integración Implícita Necesidad de resolver múltiples ecuaciones Utiliza la matriz K ( $F=K \cdot u$ ) Estable	Integración Explícita Paso a Paso Utiliza steps de resolución pequeños A veces es inestable
Espacio de disco requerido	Cálculos repetitivos. Suelen ocupar mucho espacio	No utiliza cálculo repetitivo Espacio Normal
Problemas lineales	Puede resolver	Puede resolver
Problemas no lineales	Puede resolver	Óptimo incluso con no linealidades grandes
Contacto	Puede resolver contactos simples	Óptimo incluso para contactos complejos y con condiciones variables.



## 6.5 Conformado por indentación implementado en ABAQUS

Debido a la dificultad que entraña la implementación de los casos estudiados en este programa en comparación con DEFORM, se decide únicamente representar los mismos casos que se han llevado a cabo mediante ensayos reales con ABAQUS. De esta forma se obtienen tres comparativas de resultados (elementos finitos mediante, TLS y ensayos experimentales), verificando los datos obtenidos de la aplicación del MEF mediante dos programas de elementos finitos.

Por tanto, el caso de indentación estudiado se dividirá, a su vez, en una serie de casos más simples, con la intención de ir implementando el caso completo en ABAQUS. Esto será necesario, como se ha comentado en el párrafo anterior, debido a la dificultad que entraña trabajar con este tipo de programa, ya que un simple problema de indentación puede resultar complejo, ya que se traduce en un problema de contacto con grandes deformaciones.

Los resultados obtenidos de la simulación de los ensayos reales en ABAQUS y DEFORM se explicarán más adelante, en el capítulo 8 referente a los ensayos

## 6.6 Contratación de resultados obtenidos mediante el MEF, CLD y TLS mediante BRT

Una vez establecidos todos los parámetros necesarios en cuanto a las características de las simulaciones, clasificación de piezas y rango de actuación de las deformaciones, es posible realizar una comparativa entre los distintos modelos considerados y estudiados.

En la Figura 6.20 queda patente que, independientemente del ancho del punzón con el que se esté realizando la indentación, una vez traducidos los esfuerzos a la relación adimensional  $p/2k$ , los resultados coinciden en cuanto a la evolución de los mismos.

Esto se debe a la proporcionalidad de los esfuerzos. Es decir, si se trabaja con un punzón de ancho  $Z$  mm, se obtiene un esfuerzo de  $X$  Newtons que, traducidos a su valor en presión, equivaldrían a  $X/(Z \text{ mm}^2)$  MPa, que a su vez, dividido por  $2k$  daría un valor  $Y$ . De igual forma, trabajando con un punzón con el doble de ancho que el anterior ( $2Z$  mm), se obtiene un esfuerzo de  $2X$  Newtons, por tanto, al expresar el esfuerzo de acuerdo a la relación  $p/2k$  se llegará al mismo resultado  $Y$ .

Es decir, se trabajará con unos resultados obtenidos mediante elementos finitos para realizar la comparativa, sabiendo que la representación, tanto para los valores obtenidos con el DEFORM como para los obtenidos por los demás métodos, son adimensionales e independientes del punzón que se esté tratando.

En la Figura 6.22 se muestran los resultados de la aplicación del TLS mediante su concepción modular, para todo el rango de posibilidades según el factor de forma tratado, es decir, aplicando sus dos vertientes: pieza finita e infinita; y los resultados obtenidos del estudio realizado utilizando DEFORM 2D, para un rozamiento  $m=0,7$ .

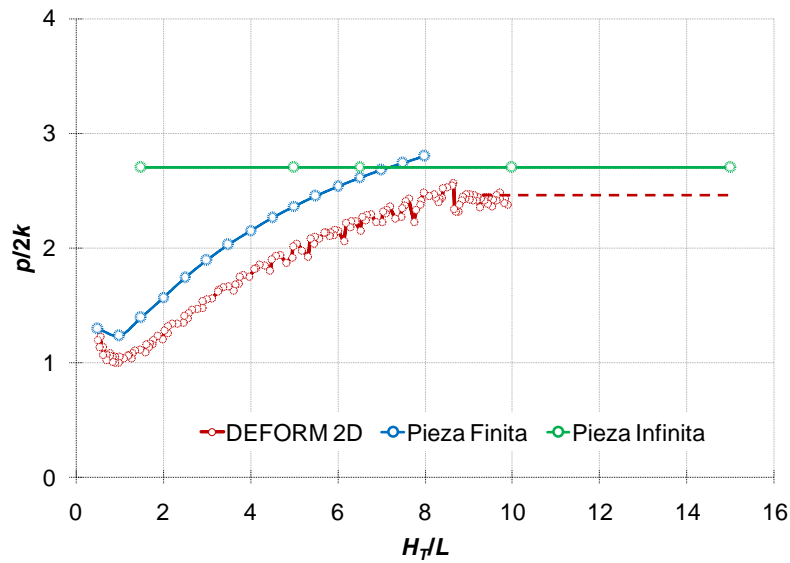


Figura 6.22: Comparativa de resultados entre MEF y TLS

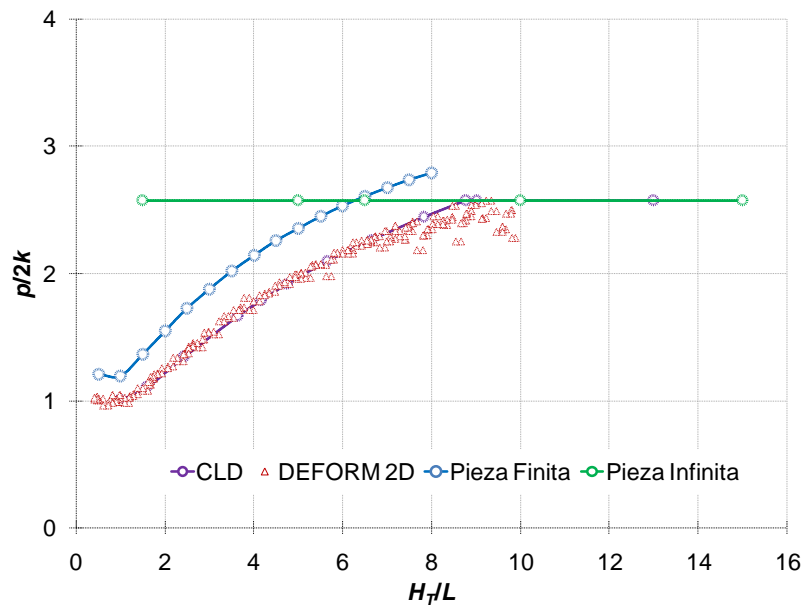


Figura 6.23: Comparativa de los tres métodos: MEF, CLD y TLS modular

Se aprecia el buen ajuste que presentan los resultados que se desprenden de la aplicación del TLS modular, al igual que sucedía en su comparativa con el CLD, radicando la diferencia aparente en un 17% máximo en su zona finita que, como se ha comentado anteriormente, se muestra en el estudio pero no tendrá lugar, en la mayoría de los casos, en la industria. Atendiendo a estudios realizados para nano-indentaciones o indentaciones superficiales [20], la diferencia porcentual entre el análisis del proceso mediante MEF y TLS se sitúa entre unos porcentajes de 12% y 27% según el modelo utilizado. Queda patente, por tanto, que con el TLS modular, para procesos de indentación considerados para un rango de piezas y penetraciones mayores, se ofrece unos resultados admisibles y bastante cercanos a los obtenidos mediante otros métodos, con los que se ha realizado su comparativa.

Por último, en la Figura 6.23, se muestra una comparativa de los tres métodos considerados, para un rozamiento  $m=0$ , exponiendo nuevamente la similitud de resultados obtenidos con el TLS.

## Referencias

- [1] O. C. Zienkiewicz, *The finite element method*: McGraw-Hill, 1977.
- [2] B. Irons and S. Ahmad, *Techniques of finite elements*: E. Horwood, 1984.
- [3] T. M. Tan, S. Li, and P. C. Chou, "Finite element solution of Prandtl's flat punch problem," *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 6, pp. 173-186, 1989.
- [4] C. H. Lee and S. Kobayashi, "Elastoplastic analysis of plane-strain and axisymmetric flat punch indentation by the finite-element method," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 12, pp. 349-370, 1970.
- [5] W. J. Duncan and A. R. Collar, "LXXIV. A method for the solution of oscillation problems by matrices," *Philosophical Magazine Series 7*, vol. 17, pp. 865-909, 1934/05/01 1934.
- [6] J. H. A. D.E, "Energy Theorems and Structural Analysis: A Generalized Discourse with Applications on Energy Principles of Structural Analysis Including the Effects of Temperature and Non-Linear Stress-Strain Relations," *Aircraft Engineering and Aerospace Technology*, vol. 26, pp. 383-394, 1929.
- [7] M. J. Turner, R. W. Clough, H. C. Martin, and L. J. Topp, "Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures," *Journal of the Aeronautical Sciences (Institute of the Aeronautical Sciences)*, vol. 23, pp. 805-823, 1956/09/01 1956.
- [8] R. H. Gallagher, "Stress Analysis of Heated Complex Shapes," *ARS Journal*, vol. 32, pp. 700-707, 1962/01/01 1962.
- [9] R. J. Melosh, "Basis for derivation of matrices for the direct stiffness method," *AIAA Journal*, vol. 1, pp. 1631-1637, 1963/07/01 1963.
- [10] E. L. Wilson, "Structural analysis of axisymmetric solids," *AIAA Journal*, vol. 3, pp. 2269-2274, 1965/12/01 1965.
- [11] J. S. Archer, "Consistent matrix formulations for structural analysis using finite-element techniques," *AIAA Journal*, vol. 3, pp. 1910-1918, 1965/10/01 1965.
- [12] C. A. Felippa, "A Historical Outline of Matrix Structural Analysis: A Play in Three Acts," *Computers & Structures*, 2000.
- [13] O. C. Zienkiewicz and E. O. I. de Navarra, *El método de los elementos finitos*: Editorial Reverté, S.A., 1981.
- [14] G. W. Rowe, C. E. N. Sturgess, P. Hartley, and I. Pillinger, *Finite-Element Plasticity and Metalforming Analysis*. U.K.: Cambridge University Press, 2005.
- [15] W. Johnson and H. Kudō, *The mechanics of metal extrusion*: Manchester University Press, 1962.
- [16] M. V. Hormaza, E. Amezua, R. Avilés, and A. Hernández, "Método de regularización de mallas de Elementos Finitos en modelos tridimensionales sólidos," *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, vol. 11, p. 20, 1995.

- [17] K. Ho-Le, "Finite element mesh generation methods: a review and classification," *Computer-aided Design*, vol. 20, 1988.
- [18] S. H. Lo, "Finite element mesh generation and adaptative meshing," *Progress in Structural Engineering and Materials*, 2002.
- [19] T. J. Baker, "Adaptive modification of time evolving meshes," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 194, pp. 4977-5001, 2005.
- [20] N. Topcu, "Numerical, Analytical and Experimental Analysis of Indentation," Master of Science in Mechanical Engineering, Department of Mechanical Engineering, Middle East Technical University, Turkish, 2005.



# CAPÍTULO 7

---

## OTROS CASOS DE ESTUDIO

*Análisis, Desarrollo y Validación del Método del Límite Superior en Procesos de Conformado por Indentación*

---





## Índice Capítulo 7

7.1	Introducción del Rozamiento .....	7.1
7.2	Introducción del endurecimiento por deformación .....	7.4
7.3	Materiales simulados.....	7.7
7.3.1	Cálculo del exponente de endurecimiento .....	7.14
7.3.2	Resultados Modelo de Endurecimiento 3 .....	7.16
7.3.3	Resultados Modelo de Endurecimiento 2 .....	7.18
7.3.4	Resultados Modelo de Endurecimiento 1 .....	7.21
7.4	Estudio Punzón Inclinado .....	7.23



## 7. OTROS CASOS DE ESTUDIO

Una vez establecido el modelo óptimo para el caso de indentación mediante Punzón Plano y realizado el estudio comparativo así como los ajustes necesarios en el modelo, es conveniente ampliar el ámbito de estudio, incorporando nuevas variables al mismo, con el fin de acercar dicho estudio lo más posible a lo que sucede en un proceso real de indentación.

De esta forma, en este capítulo se procede a analizar la incorporación, en el modelo del TLS mediante la consideración modular de BRT, de adicionales efectos tales como el rozamiento y el factor de endurecimiento, o la introducción de generalizaciones de la geometría de la herramienta, a través del estudio con Punzón Inclinado.

### 7.1 Incorporación del efecto del Rozamiento

El estudio del rozamiento se remonta al siglo XV de la mano de notables pensadores, artistas e ingenieros como Leonardo da Vinci [1, 2], quien realizó su primer experimento sobre esta materia, deslizando un bloque rectangular sobre una superficie plana y seca, concluyendo que la fuerza de fricción es independiente del área de contacto de las superficies y que es proporcional a la carga aplicada.

Estas conclusiones fueron esbozadas como leyes por parte de Amontons en 1699 y estudiadas por Coulomb en 1781. Hoy día, la tribología es la ciencia encargada de estudiar la fricción, la lubricación y el desgaste que pueda tener lugar durante el contacto de superficies en movimiento.

El presente estudio se centrará únicamente en el rozamiento que tendrá lugar entre las superficies de contacto. Es decir, entre el punzón y la pieza a deformar.

Al igual que en otros procesos de conformado plástico, es necesario considerar el rozamiento que se produce durante el proceso de indentación. Este rozamiento se debe al contacto que sufre la pieza a deformar con la base del punzón destinado a otorgar la forma deseada al material a conformar.

La Ec. 7.1 refleja la ley de Amontons, donde  $\tau$  identifica la tensión por rozamiento,  $\mu$  el coeficiente de rozamiento por deslizamiento y  $p$  la tensión normal en la intercara punzón-pieza.

$$\tau = \mu \cdot p \quad \text{Ec. 7.1}$$

Este tipo de rozamiento es válido para contactos elásticos, así como para procesos de deformación con presiones bajas en la intercara punzón-pieza, del orden de  $p/\sigma_0 < 1,5$ , donde  $\sigma_0$  es la tensión de fluencia de la pieza [3, 4].

Teniendo en cuenta lo expresado anteriormente, en el proceso de indentación estudiado, en el que las condiciones de contacto son bastante superiores a este orden de magnitud, se considerará el rozamiento por adherencia, presente en procesos con deformación plástica y presiones en la intercara punzón-herramienta altas, como es el caso.

El rozamiento por adherencia,  $m$ , abarcará valores del orden de 0 a 1, según el proceso, el tipo de lubricación y el esfuerzo sometido. Por tanto, es necesario estudiar el modelo con los distintos valores posibles de rozamiento para realizar una validación del mismo y asegurar la inexistencia de variaciones incoherentes en la evolución de los resultados graficados.

En la Figura 7.1 se presenta una comparativa de los resultados para una pieza finita, mostrando los valores extremos de rozamiento.

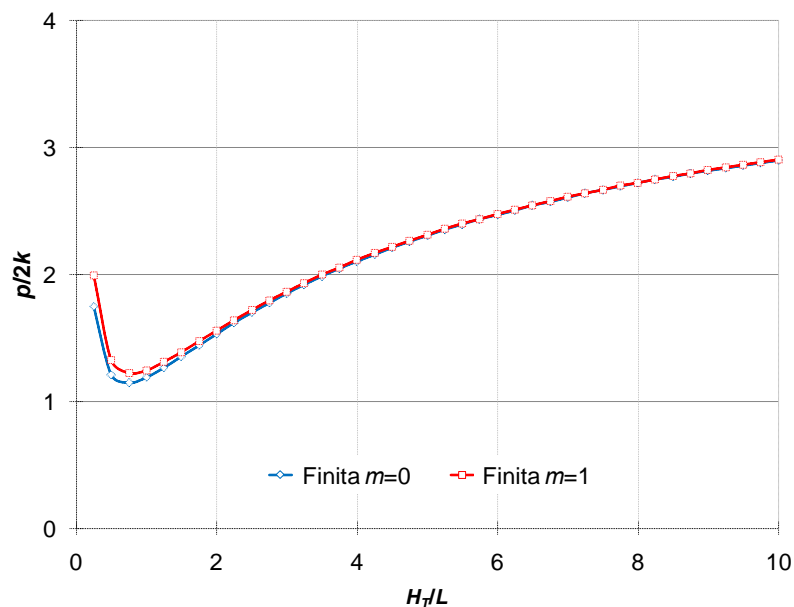


Figura 7.1: Evolución según el rozamiento por adherencia ( $m$ ) para pieza Finita

Se aprecia que conforme el FF aumenta, esta diferencia de los valores tiende a desaparecer. Esto es debido al tamaño relativo de la pieza con el punzón. En este tipo de procesos, la matriz que conforma el material siempre será más pequeña que el material que se pretende deformar plásticamente. Conforme aumenta el FF, la pieza a

deformar será cada vez más grande, por lo que el aumento de esfuerzo que pueda conllevar la existencia de rozamiento, irá perdiendo relevancia frente a la cantidad de material que tendrá que ir desalojando el punzón en su avance y es por ello que, a Factores de Forma mayores, menor es la diferencia entre los resultados para distintos valores de rozamiento  $m$ . Se produce así un proceso de enmascaramiento del efecto de rozamiento con respecto al tamaño de la pieza.

En la Tabla 7.1, se aprecia cómo la diferencia de valores de  $p/2k$  es reducida, observándose así cómo se diluye el efecto del rozamiento, debido al gran tamaño de la pieza con respecto al tamaño relativo del punzón. Se encuentran marcados en rojo los valores a partir de los cuales no se seguirá aplicando el modelo para pieza finita y se procederá a la aplicación del modelo para pieza infinita, ya que éste arrojará valores menores, como se muestra en la Tabla 7.2.

Tabla 7.1: Valores de la evolución de  $p/2k$  para distintos valores de  $m$  y factores de forma en pieza finita

$m=0$	$m=0,3$	$m=0,5$	$m=0,7$	$m=1$	$H_f/L$
2,9855	2,9863	2,9869	2,9875	2,9883	10,00
2,9428	2,9437	2,9444	2,9450	2,9459	9,50
2,8970	2,8980	2,8986	2,8993	2,9003	9,00
2,8476	2,8487	2,8494	2,8501	2,8512	8,50
2,7943	2,7954	2,7962	2,7970	2,7982	8,00
2,7365	2,7378	2,7387	2,7395	<b>2,7409</b>	7,50
2,6737	2,6751	2,6761	<b>2,6771</b>	2,6785	7,00
2,6052	<b>2,6068</b>	<b>2,6079</b>	2,6090	2,6106	6,50
<b>2,5302</b>	2,5321	2,5333	2,5345	2,5363	6,00
2,4479	2,4500	2,4513	2,4527	2,4548	5,50
2,3571	2,3594	2,3610	2,3626	2,3649	5,00
2,2565	2,2592	2,2610	2,2628	2,2656	4,50
2,1447	2,1479	2,1500	2,1521	2,1553	4,00
2,0199	2,0237	2,0262	2,0287	2,0325	3,50
1,8802	1,8848	1,8879	1,8909	1,8955	3,00
1,7240	1,7298	1,7337	1,7375	1,7433	2,50
1,5509	1,5585	1,5635	1,5686	1,5761	2,00
1,3657	1,3762	1,3833	1,3904	1,4010	1,50
1,1948	1,2116	1,2227	1,2339	1,2506	1,00

Para el caso de una pieza infinita, debido a la igualdad de resultados para distintos FF, la diferencia entre valores con distintos rozamientos será siempre

constante pero, igualmente, como se aprecia en la Figura 7.2 para valores extremos de  $m$ , la diferencia no es elevada.

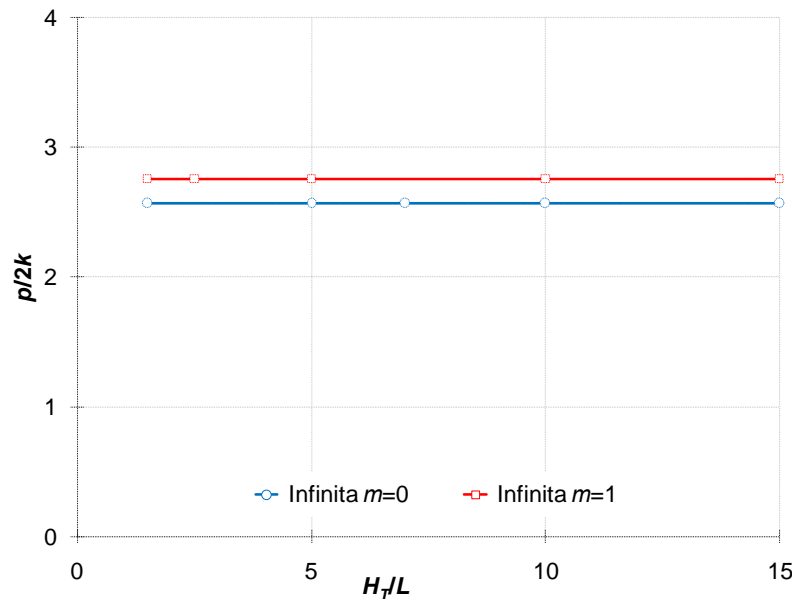


Figura 7.2: Resultado para valores extremos de rozamiento, pieza Infinita

Tabla 7.2: Valores de la evolución de  $p/2k$  para distintos valores de  $m$  en pieza infinita

$m=0$	$m=0,3$	$m=0,5$	$m=0,7$	$m=1$
2,5717619	2,6276839	2,6649652	2,7022465	2,7581684

## 7.2 Incorporación del efecto del endurecimiento por deformación

Hasta el momento, en el desarrollo de la presente Tesis Doctoral, se ha trabajado en condiciones de deformación plana, con un material rígido-plástico perfecto. A continuación se generalizará el estudio introduciendo una caracterización del material de la pieza a través de su factor de endurecimiento, que afectará a su comportamiento en el proceso.

Con el fin de seguir acercando el método al proceso real y realizar un estudio comparativo con otros métodos de aplicación actual, así como mostrar la adecuación del método del TLS mediante módulos de BRT, se presentará una comparativa con los resultados obtenidos de la resolución de la misma problemática mediante el método numérico de MEF. El programa de deformación utilizado, en su modalidad seleccionada, DEFORM 2D, admite introducir una variedad considerable de distintos parámetros en el estudio de la deformación plástica por indentación, entre los que se encuentra el endurecimiento por deformación, parámetro abordado en el siguiente apartado.

En cuanto al TLS, una de las ventajas en la consideración de la aplicación modular, comentada anteriormente, es la posibilidad de la introducción de distintos parámetros que permiten enriquecer el estudio, del proceso de indentación en

cuestión, obteniendo datos de un proceso cada vez más cercano a la realidad de los procesos industriales. Es por ello inevitable la introducción y el estudio del endurecimiento o acritud del material.

En la Figura 7.3 se muestra la diferencia en el comportamiento entre un material sin endurecimiento (a) y con endurecimiento (b).

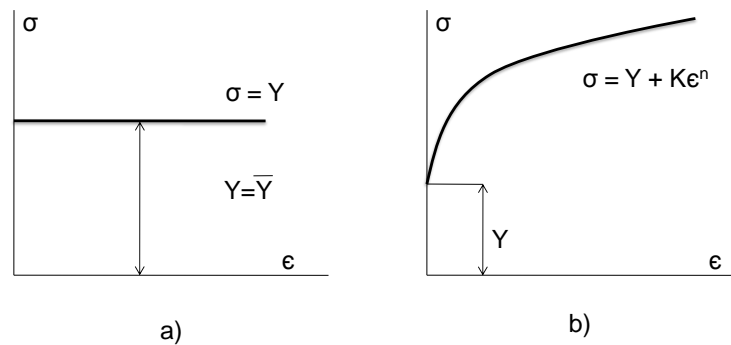


Figura 7.3: Aproximación de las curvas tensiones-deformaciones unitarias. Sin endurecimiento (a) y con endurecimiento (b)

Siempre bajo consideración de deformación plana, para metales trabajados en frío con una tensión de fluencia  $Y$ , los resultados para incorporar el endurecimiento por deformación en el proceso de indentación objeto de estudio, serán factibles gracias a la introducción de la forma simplificada de la ecuación de la curva de fluencia debida a Ludwik representada en la Ec. 7.2

$$\sigma = Y + K \cdot \epsilon^n \quad \text{Ec. 7.2}$$

Siendo  $n$  el exponente de endurecimiento por deformación, constante específica de cada material, y  $K$  el índice de fuerza o coeficiente de resistencia, que depende de la estructura del mismo y varía con el procesamiento considerado. En la Tabla 7.3 se muestran algunos ejemplos de distintos valores de  $n$  y  $K$  para diferentes metales o aleaciones

Tabla 7.3: Valores de  $n$  y  $K$  para diferentes metales y aleaciones [5]

Material (DIN)	$K$ (N/mm <sup>2</sup> )	$n$
Aluminium 1100-O	180	0.20
Aluminium 6061-T6	410	0.05
Brass 70-30 annealed	900	0.49
Brass 85-15 cold-roller	580	0.34
Copper, annealed	315	0.54
Steel low-C annealed	530	0.26
Steel 4135 cold-rolled	1100	0.14
Steel 304 stainless, annealed	1275	0.45

La ecuación de Ludwik es preferible a la ecuación de Hollomon (Ec. 7.3) porque, al contrario que ésta, sí incluye la tensión hasta el punto de fluencia [6], no solo la tensión producida por el esfuerzo de endurecimiento.

$$\sigma = K \cdot \epsilon^n \quad \text{Ec. 7.3}$$

Ahora bien, la Ec. 7.2 se expresa en función del límite de fluencia  $Y$  y de la deformación verdadera o natural  $\epsilon$ . Por tanto, al trabajar con el modelo analítico del TLS, es necesario realizar una transformación de los parámetros con el fin de adaptar su aplicación al estudio de endurecimiento por deformación en el proceso de indentación estudiado. El TLS se aplica mediante el estudio de instantes de deformación, por lo que trabajará con respecto a la longitud y área originales y, por tanto, desde el punto de vista de la deformación ingenieril. La deformación verdadera e ingenieril se relacionan como muestra la siguiente ecuación:

$$\epsilon = \ln(1 + e) \quad \text{Ec. 7.4}$$

Como

$$2k = 1,155Y \quad \text{Ec. 7.5}$$

$$k = 0,5775Y = 0,6Y \quad \text{Ec. 7.6}$$

Por lo que la ecuación a aplicar en el estudio del endurecimiento por deformación, quedaría de la siguiente forma:

$$k = k_0 + 0,6 \cdot K \cdot \epsilon^n \quad \text{Ec. 7.7}$$

Sustituyendo la Ec. 7.4 en la Ec. 7.7, para  $e = \Delta h/H_T$

Planteando una primera aproximación con elementos finitos, muestra que los resultados para un mismo material son distintos según si se ha considerado endurecimiento o no. En el caso de la Figura 7.4, se muestran los resultados para una indentación poco profunda realizada en una pieza considerada como infinita, en un Aluminio A92024 (designación UNS).



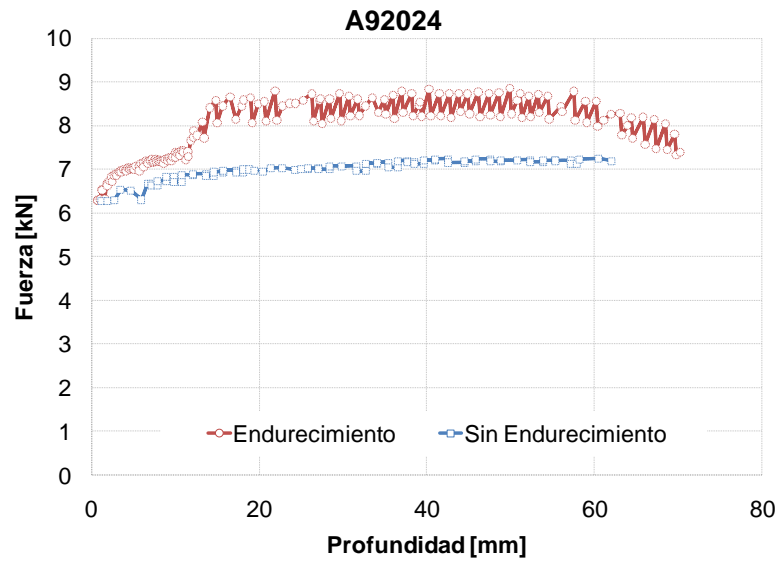


Figura 7.4: Comparativa de resultados para un mismo material (A92024) sin endurecimiento y con endurecimiento por deformación

### 7.3 Materiales simulados

Con el fin de establecer un sistema generalizado que permita abarcar el mayor número de materiales posibles mediante el TLS, se realizan una serie de simulaciones con DEFORM 2D para distintos materiales, dentro de lo posible que permite la base de datos de materiales de dicho programa. De este modo, se trabaja con cuatro grupos distintos de materiales: aluminios, aceros, titanios y superaleaciones.

Tanto el acero como el aluminio y sus aleaciones están ampliamente introducidos en la industria por su variedad de usos, siendo materiales polivalentes y estratégicos. El aluminio, nuevamente en la industria aeronáutica, es solicitado por su bajo peso, que implica un menor gasto de combustible. También es utilizado desde la fabricación de espejos domésticos, pasando por la fabricación de latas y tetrabriques, hasta piezas industriales de todo tipo de vehículos. El acero, al igual que el aluminio, resulta un metal muy versátil gracias a las distintas aleaciones en las que puede estar presente. También se encuentra de forma masiva en los utensilios de la vida cotidiana y máquinas en general, así como es usado en la industria armamentística, naval y automovilística (Figura 7.5)



Figura 7.5: Biela de motor de acero forjado  
Fuente: Wikipedia. Usuario Stahlkoche

Dentro del grupo de los aluminios y aceros, se ha trabajado con los siguientes materiales:

- **A92024:** Aleación de aluminio sensibles a altas temperaturas que oscilan entre los 200 y los 250°C. Cuando se encuentran expuestas a temperaturas bajo cero presentan un aumento en la resistencia, así como esta resistencia se ve reducida cuando se exponen a altas temperaturas. Se utiliza en la fabricación de remaches, ruedas de camiones, equipos de tripulación, estructuras de aviones y equipamiento veterinario, científico u ortopédico.
- **A95052:** Material no tratable térmicamente, con buena resistencia a la corrosión, especialmente a agua salada. Se utiliza, generalmente, en la fabricación de tubos hidráulicos, pequeñas embarcaciones, congeladores, elementos de aviación. También se hace uso ampliamente para conformado de chapa.
- **A96062:** Aleación de aluminio endurecido con buenas propiedades mecánicas y apta para soldadura. Utilizada para estructuras de alta resistencia que requieran buen comportamiento frente a la corrosión, camiones, barcos, vehículos ferroviarios, mobiliario y tuberías.
- **A93003:** Esta aleación tiene una alta ductilidad, así como buena resistencia a la corrosión y una dureza moderada. No obstante, la dureza del material se puede incrementar mediante trabajo en frío. Es muy utilizado en la fabricación de conductos, para equipamiento químico y, generalmente, para el trabajo en chapa. Puede encontrarse fácilmente en utensilios de cocina, componentes electrónicos (hardware), ojales de aluminio, tuberías de gas, puertas de garaje, paneles de refrigeración y tanques de gasolina y de almacenamiento.
- **A96082:** De la familia de las aleaciones de aluminio 6000, cuenta con ser la que más dureza presenta. Es conocida como una aleación estructural, aunque también es muy común su uso para maquinaria. Su gran dureza ha reemplazado a la aleación A96061 en muchas aplicaciones. La adición de manganeso controla la estructura del grano, el cual devuelve esa dureza que la caracteriza. Se utiliza en aplicaciones que se van a ver

- sometidas a gran estrés, en cerchas, puentes, grúas, aplicaciones de transporte, así como para barriles de cerveza y leche.
- *A91070*: Esta aleación es una de las más utilizadas en el mundo hoy día. Es un metal versátil que puede transformarse casi en cualquier forma. Este metal ligero puede ser soldado, remachado o combinado con resinas de unión según los requisitos. Se puede encontrar en componentes industriales, en edificación y construcción, transporte, material eléctrico, cables de comunicación, así como para piezas de unión.
  - *G10450*: Aleación de acero al carbono, contiene la combinación ideal para el trabajo en áreas que requieran gran dureza y resistencia. Es posible conseguir grandes precisiones en cuanto al tamaño, concentricidad y rectitud, lo que en conjunto permite minimizar el desgaste en aplicaciones que impliquen alta velocidad de trabajo. Se utiliza, principalmente, en la fabricación de tornillo, engranajes, ejes y piezas de maquinaria.
  - *G10080*: Presenta una excelente capacidad de soldadura. Generalmente se utiliza en la fabricación de componentes mediante extrusión, prensado y forjado
  - *S30400*: Esta aleación de acero inoxidable es la más versátil y más utilizada, presente en multitud de productos, formas y acabados. En la industria se puede encontrar en los equipos de procesamiento de comida, especialmente en la industria de cerveza, de vino y leche. Además de utilizarse para bancos de cocina, fregaderos, panelaje para arquitectura, contenedores de químicos y intercambiadores de calor
  - *S30200*: Versión del *S30400* con contenido en carbono ligeramente superior. Se encuentra comúnmente en forma de alambre o tira. Es una designación estándar para chapas de acero inoxidable de cromo y cromo-níquel. Se puede encontrar en recipientes a presión, así como en resortes, arandelas, pantallas y cableado.
  - *S32100*: Aleación estabilizada mediante la adición de titanio. Muy utilizadas porque no son sensibles a la corrosión intergranular una vez tratadas térmicamente. Del mismo modo, el titanio limita la aleación ya que no se transfiere bien mediante arcos a altas temperaturas, por lo que no está recomendada para soldadura. Se usa en la fabricación de colectores de escape de aviones, juntas de dilatación, piezas de horno, tubos de calefacción e intercambiadores de calor.

Las superaleaciones suelen presentar una excelente resistencia mecánica así como una muy buena resistencia a la fluencia a altas temperaturas. También exhiben un buen comportamiento frente a la corrosión y a la oxidación. Se suelen emplear comúnmente en la industria aeroespacial para la fabricación de turbinas (Figura 7.6), debido a su resistencia a las altas temperaturas presentes en estos componentes en uso. También se puede encontrar aplicación de este material en los vehículos espaciales, submarinos, reactores nucleares o en los tubos de intercambiadores de calor [7].



Figura 7.6: Álabes de turbina  
Fuente: Wikipedia. Usuario: Stahlkoche

Dentro de este grupo de materiales, clasificados según normativa UNS, se ha trabajado con los siguientes:

- **N06600**: Conocido comúnmente como Inconel 600, es una aleación reforzada resistente a la corrosión y al trabajo a altas temperaturas, del orden de 1094°C. No es magnético y presenta altos niveles de resistencia, tanto a las formas habituales de corrosión como a la producida por la mayoría de los ácidos orgánicos e inorgánicos, agua de alta pureza y gases de escape. Se utiliza en la industria aeroespacial, así como en la industria del papel, química y nuclear.
- **G52986**: Aleación de acero que excede los límites en composición de Mn, C, Mo, Si, Ni, V y B para aceros con alto contenido en carbono. Responden con mayor rapidez a tratamientos mecánicos y térmicos que los aceros al carbono. Su principal aplicación es en la fabricación de rodamientos.
- **N02211**: El Ni es conocido por su resistencia a altas temperaturas y es muy utilizado para aleaciones especiales en las que sea necesario controlar la expansión del metal, obtener resistencia eléctrica, magnética o memoria de forma. Este material es una aleación níquel-manganeso, consiguiendo resistencia a la corrosión mediante sulfuros a altas temperaturas gracias al manganeso. Suele utilizarse en el procesamiento de productos químicos, equipos de control de la contaminación, fusibles y rejillas de tubos de vacío, así como está presente en procesos de tratamientos de vidrio.
- **G33106**: Aleación de acero al carbono aleado con níquel y cromo. Presenta una excelente dureza una vez recocido. Utilizado en la industria aeronáutica como, por ejemplo, en la fabricación de válvulas hidráulicas.

Por otro lado, el titanio resulta interesante también desde el punto de vista aeroespacial, ya que permite combinaciones con hierro, aluminio, vanadio y molibdeno entre otros materiales, que producen aleaciones fuertes a la vez que ligeras. También es muy usado en la industria militar, de la automoción e incluso en el área de la ortopédica y la implantología (Figura 7.7), siendo uno de los materiales que no produce rechazo del cuerpo humano una vez insertado [8].



Figura 7.7: Estabilización de rotura de pómulo mediante inserto de titanio

Fuente: Wikipedia. Usuario: Choihei

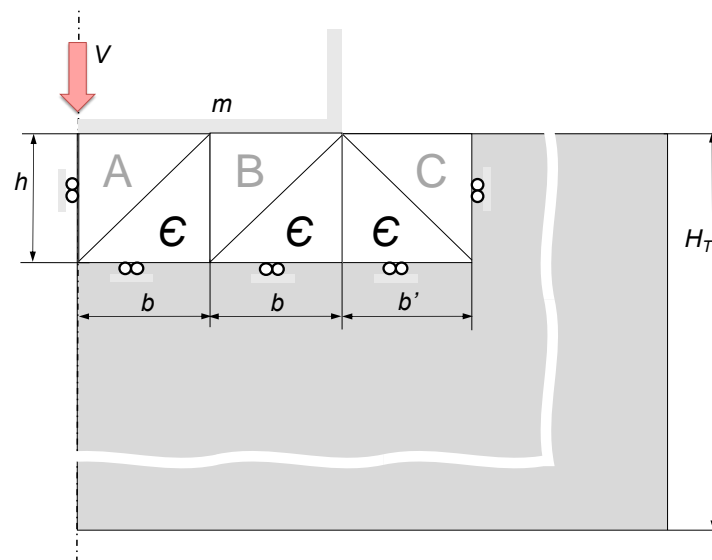
Los Titanios ensayados mediante simulación han sido los siguientes:

- *R58010*: Este material es una aleación beta de titanio, tratable térmicamente, generalmente considerado para aplicaciones de alta resistencia. Combina la buena manufactura con una resistencia excelente a la corrosión y buenas propiedades mecánicas. Se utiliza en la fabricación de componentes de alta resistencia, fuselajes, resortes de alambre.
- *R50250*: Titanio sin alear diseñado para presentar características excelentes de soldabilidad, buena resistencia, dureza al impacto, ductilidad y resistencia a la corrosión. Sus principales aplicaciones, gracias a su resistencia a la corrosión, se encuentran en la industria química, en fuselajes y otras áreas donde se requiera facilidad de conformado.
- *R50400*: Este material, dentro de la categoría de titanios no aleados, es el más comúnmente utilizado. Combina buena resistencia a la corrosión, soldabilidad resistente, ductilidad y es apropiado para operaciones de conformado. También se utiliza en el procesamiento de productos químicos, así como en equipos marinos y fuselajes.
- *R53400*: Esta aleación de titanio es tratable térmicamente y combina, al igual que las anteriores, buen comportamiento ante la corrosión, como aplicable en soldadura y fácil conformado. Ampliamente utilizado en la industria aeronáutica para producción de turbinas y aplicaciones estructurales que trabajaran a altas temperaturas. Generalmente se emplea en aplicaciones hasta 400°C.

Por su importancia y presencia en la industria, se establece el estudio del proceso de indentación para materiales pertenecientes a estos cuatro grupos de materiales, mediante su resolución mediante elementos finitos y su posterior comparación con el método desarrollado en la presente Tesis Doctoral, para la aplicación del TLS.

Atendiendo a la configuración modular establecida para el punzón plano, es necesario desarrollar una serie de modelos de endurecimiento dentro del modelo

Para el Modelo Modular de Endurecimiento 1 (Figura 7.8), se va a considerar que todo el material que se encuentra bajo el punzón se endurece. Por consiguiente, se aplicará la ecuación de endurecimiento a ambos módulos, tanto a los situados bajo el punzón, como al exterior, ya que se entiende que éste recibe el empuje del material que se ve desplazado bajo el punzón y, por lo tanto, también sufrirá deformación y, a su vez, endurecimiento por deformación.



Para el Modelo Modular de Endurecimiento 2 se tiene en cuenta la misma consideración que para el Modelo Modular de Endurecimiento 1, pero sólo se aplicará el endurecimiento por deformación a los módulos que se encuentra bajo el punzón. En este caso se plantea la hipótesis de que el material del módulo exterior no sufre la misma deformación que el material contenido en los módulos precedentes y, por tanto,

su endurecimiento podría ser despreciable. El material situado en los primeros módulos recibe todo el empuje del punzón y el del módulo exterior recibe el empuje del material que se ve desplazado de la primera parte. Este módulo exterior se plantea con la capacidad de absorber este desplazamiento de material sin ver perjudicado su estado hasta el punto llevarse a cabo un comportamiento similar al ocurrido con el rozamiento, que en relación con la pieza, vería perdido su efecto y podría ser despreciado.

En el caso del Modelo Modular de Endurecimiento 3 únicamente se considera endurecimiento en el primer módulo. Este modelo es apto para materiales que endurecen muy poco debido a la deformación, es decir, materiales que tiene una  $n$  pequeña, del orden de 0,05 a 0,10. Por tanto, el efecto del endurecimiento se verá concentrado en el cálculo del primer módulo, dejando el resto de módulos sin éste. En la Figura 7.9 se aprecia la diferencia existente entre los tres Modelos de Endurecimiento comentados para un A92024.

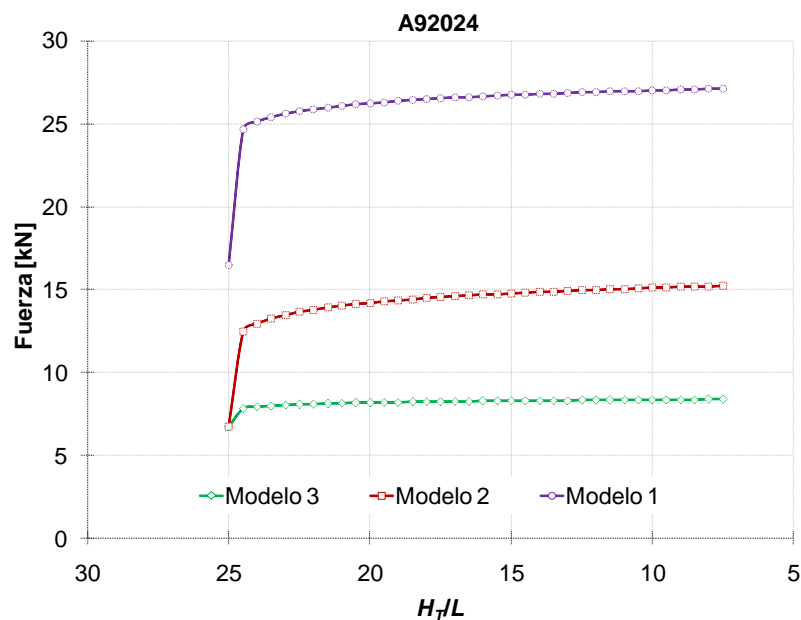


Figura 7.9: Comparativa entre los 3 Modelos de Endurecimiento para A92024

Mediante las distintas comparativas realizadas, es posible encontrar un patrón de actuación dentro de cada grupo de metales seleccionado. De esta forma, se establece un criterio de clasificación según el valor del factor de endurecimiento  $n$ , mostrado en la

Tabla 7.4

Se aprecia que se puede generar un criterio general para todos los grupos estudiados menos para las superaleaciones. Esto se debe a las características especiales que presentan este tipo de materiales. Por tanto, la clasificación final se presenta en la Tabla 7.5.

Tabla 7.4: Clasificación según valores de  $n$

Material	$n$	Modelo Endurecimiento
Aluminio y aleaciones	$0 \leq n \leq 0,10$	Modelo 3
	$n > 0,10$	Modelo 2
Aceros y aleaciones	$0 \leq n \leq 0,10$	Modelo 3
	$n > 0,10$	Modelo 2
Titanios y aleaciones	$0 \leq n \leq 0,10$	Modelo 3
	$n > 0,10$	Modelo 2
Superalaleaciones	$0 \leq n \leq 0,12$	Modelo 3
	$n > 0,12$	Modelo 1

Tabla 7.5: Agrupación final

Material	$n$	Modelo Endurecimiento
Aluminio, Acero, Titanio y aleaciones	$0 \leq n \leq 0,10$	Modelo 3
	$n > 0,10$	Modelo 2
Superalaleaciones	$0 \leq n \leq 0,12$	Modelo 3
	$n > 0,12$	Modelo 1

Aunque en el Anexo II se presentan la totalidad de las gráficas y datos obtenidos en el estudio del endurecimiento mediante elementos finitos, a continuación se ilustran una serie de ejemplos para visualizar el ajuste entre este método y el TLS mediante módulos de BRT.

### 7.3.1 Cálculo del exponente de endurecimiento

El exponente de endurecimiento corresponde a la propiedad relacionada con la capacidad de endurecimiento de un metal durante el proceso de conformado y resulta una buena medida del incremento de la resistencia del material debido a la deformación plástica. Los valores suelen oscilar, para materiales dúctiles a temperatura ambiente, entre 0,02 y 0,5 [9, 10]



Para el cálculo del exponente de endurecimiento  $n$  se hace uso de la norma ASTM 646 [11], que realiza un ajuste de mínimos cuadrados de la recta  $\ln(\sigma_V) = \ln(K) + n \cdot \ln(\varepsilon_V)$ , haciendo el siguiente cambio de variable (Ec. 7.8 y Ec. 7.9)

$$y = \ln(\sigma_V) \quad \text{Ec. 7.8}$$

$$x = \ln(\varepsilon_V) \quad \text{Ec. 7.9}$$

Sabiendo que los datos que ofrece DEFORM 2D son los obtenidos de la zona plástica y que además son los valores reales, es posible obtener los datos de tensión-deformación necesarios para la deducción de  $n$  y  $K$  (Figura 7.10) para cada uno de los materiales simulados. Estos resultados se muestran en la Tabla 7.6.

Tabla 7.6: Relación de  $K$  y  $n$  para materiales simulados (Designación UNS)

Material	$Y$ [MPa]	$K$ [N/mm <sup>2</sup> ]	$n$	Material	$Y$ [MPa]	$K$ [N/mm <sup>2</sup> ]	$n$
Aluminio				Titanios			
A92024	270	366,44	0,12	R58010	1050	1758,12	0,17
A95052	140	192,48	0,09	R50250	510	951,46	0,23
A96062	138	198,54	0,10	R50400	850	1398,28	0,20
A93003	120	199,54	0,12	R53400	1192,79	1315,54	0,02
A96082	200	355,29	0,11	R50250	510	951,46	0,23
A91070	68	130,45	0,21				
Aceros				Superalloys			
G10450	640	881,83	0,10	N06600	434,37	1101,03	0,20
G10080	280	577,67	0,17	G52986	762,62	1124,39	0,12
S30400	510	1073,84	0,19	N02211	337,84	896,05	0,21
S30200	250	1055,74	0,42	G33106	660	888,91	0,008
S32100	501,80	1084,64	0,28				

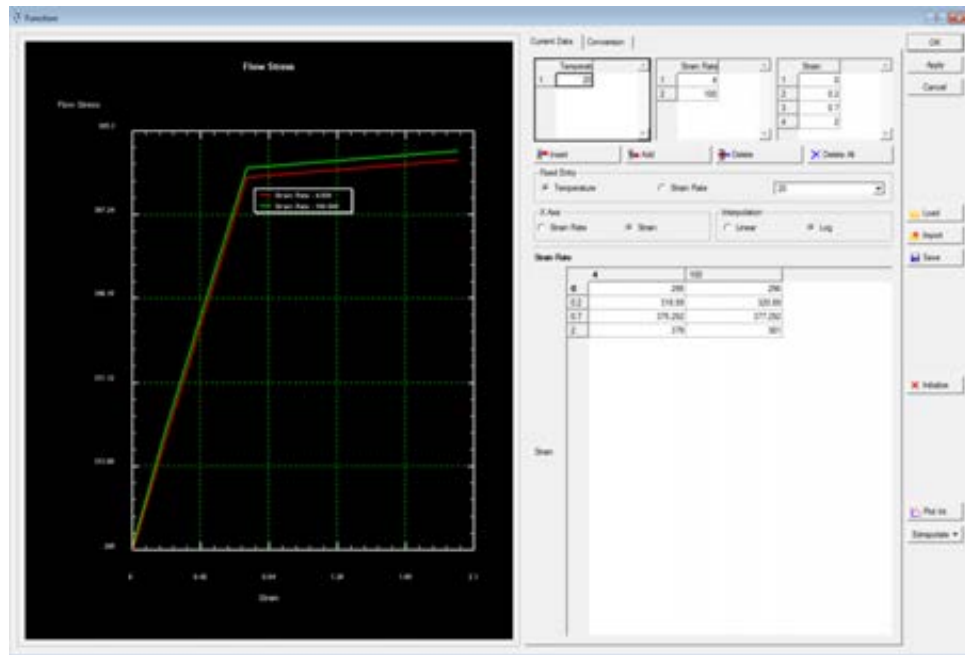


Figura 7.10: Datos de fluencia ofrecidos por DEFORM 2D

### 7.3.2 Resultados del Modelo de Endurecimiento 3

Como se ha comentado con anterioridad, DEFORM 2D cuenta con una amplia base de materiales que permiten realizar distintas simulaciones y comparaciones entre ellos. En este apartado se muestra parte de los resultados para la selección de materiales cuya  $n$  se encuentra entre 0,05 y 0,10 y por tanto se identifican con el Modelo de Endurecimiento 3. En concreto se presenta la comparación de los resultados de aplicación de este modelo, calculado mediante el TLS, frente a los resultados obtenidos mediante el MEF, para la aleación de aluminio A59502 (Figura 7.11 y Tabla 7.7) y el acero G10450 (Figura 7.12 y Tabla 7.8)

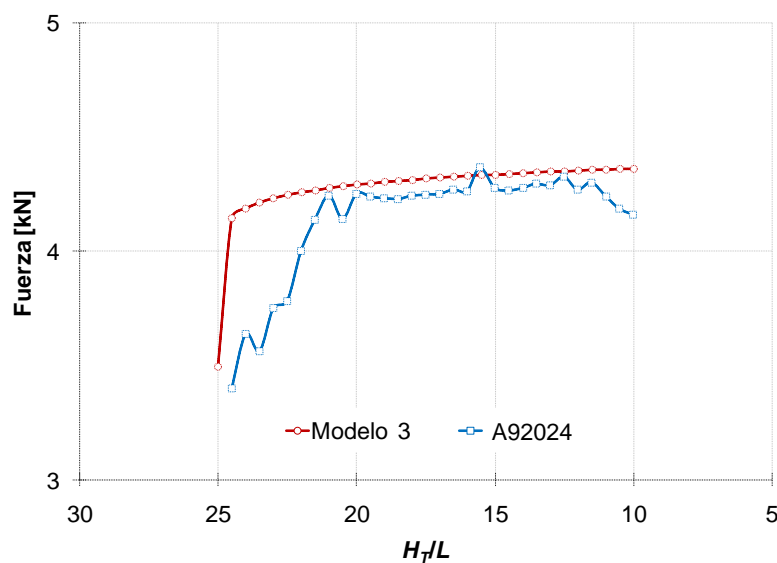


Figura 7.11: Comparativa para aluminio A95052 con endurecimiento,  $n=0.09$

Tabla 7.7: Resultados para aluminio A95052 con endurecimiento,  $n=0,09$ 

Modelo 3		MEF		Modelo 3		MEF	
$H_T/L$	F[kN]	$H_T/L$	F[kN]	$H_T/L$	F[kN]	$H_T/L$	F[kN]
25,00	3,50	25,00		17,00	4,32	17,00	4,25
24,50	4,15	24,50	3,40	16,50	4,33	16,50	4,27
24,00	4,19	24,00	3,64	16,00	4,33	16,00	4,26
23,50	4,21	23,50	3,57	15,50	4,33	15,50	4,37
23,00	4,23	23,00	3,75	15,00	4,34	15,00	4,28
22,50	4,25	22,50	3,79	14,50	4,34	14,50	4,27
22,00	4,26	22,00	4,00	14,00	4,34	14,00	4,28
21,50	4,27	21,50	4,14	13,50	4,35	13,50	4,30
21,00	4,28	21,00	4,25	13,00	4,35	13,00	4,29
20,50	4,28	20,50	4,14	12,50	4,35	12,50	4,33
20,00	4,29	20,00	4,25	12,00	4,35	12,00	4,27
19,50	4,30	19,50	4,24	11,50	4,36	11,50	4,30
19,00	4,30	19,00	4,23	11,00	4,36	11,00	4,24
18,50	4,31	18,50	4,23	10,50	4,36	10,50	4,19
18,00	4,31	18,00	4,24	10,00	4,36	10,00	4,16
17,50	4,32	17,50	4,25				

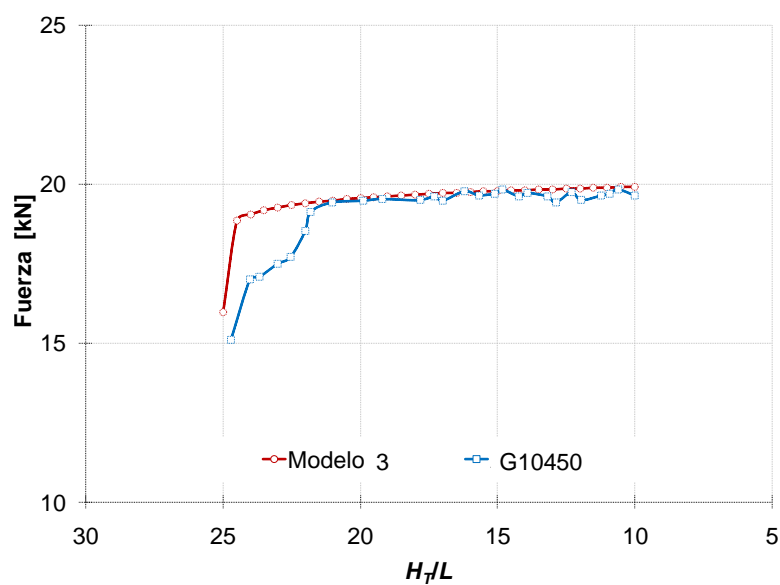
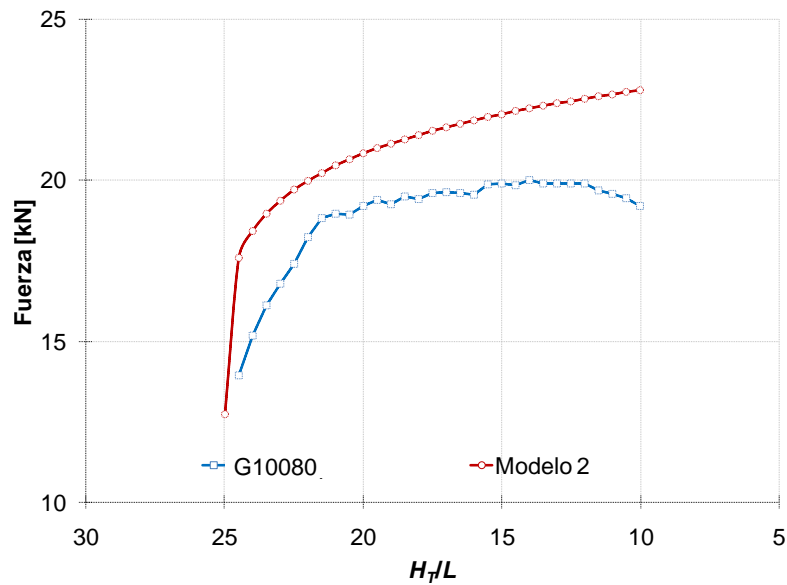
Figura 7.12: Comparativa para acero G10450 con endurecimiento,  $n=0,10$

Tabla 7.8: Resultados para acero G10450 con endurecimiento,  $n=0,10$

Modelo 3		MEF		Modelo 3		MEF	
$H_T/L$	F[kN]	$H_T/L$	F[kN]	$H_T/L$	F[kN]	$H_T/L$	F[kN]
25,00	15,98	25,00		17,00	19,72	17,00	19,71
24,50	18,85	24,50	15,10	16,50	19,74	16,50	19,83
24,00	19,06	24,00	17,02	16,00	19,76	16,00	19,63
23,50	19,18	23,50	17,08	15,50	19,78	15,50	19,73
23,00	19,27	23,00	17,49	15,00	19,79	15,00	19,62
22,50	19,34	22,50	17,71	14,50	19,81	14,50	19,44
22,00	19,40	22,00	18,55	14,00	19,82	14,00	19,75
21,50	19,45	21,50	19,13	13,50	19,84	13,50	19,50
21,00	19,49	21,00	19,43	13,00	19,85	13,00	19,64
20,50	19,53	20,50	19,49	12,50	19,86	12,50	19,72
20,00	19,57	20,00	19,54	12,00	19,88	12,00	19,85
19,50	19,60	19,50	19,50	11,50	19,89	11,50	19,64
19,00	19,63	19,00	19,63	11,00	19,90	11,00	19,71
18,50	19,65	18,50	19,48	10,50	19,91	10,50	19,63
18,00	19,68	18,00	19,79	10,00	19,92	10,00	19,73
17,50	19,70	17,50	19,65				

### 7.3.3 Resultados del Modelo de Endurecimiento 2

En este apartado se muestran los resultados para los materiales cuyo exponente por endurecimiento es mayor de 0,10 y se identifican con el Modelo de Endurecimiento 2. En concreto se presenta la comparación de los resultados de aplicación de este modelo, calculado mediante el TLS, frente a los resultados obtenidos mediante el MEF, para el acero G10080 (Figura 7.13 y Tabla 7.9) y la de la aleación de Titanio R50250 (Figura 7.14 y Tabla 7.10).

Figura 7.13: Comparativa para acero G10080 con endurecimiento,  $n=0,17$ Tabla 7.9: Resultados para acero G10080 con endurecimiento,  $n=0,17$ 

Modelo 2		MEF		Modelo 2		MEF	
$H_T/L$	F[kN]	$H_T/L$	F[kN]	$H_T/L$	F[kN]	$H_T/L$	F[kN]
25,00	6,99	25,00		17,00	12,83	17,00	12,88
24,50	10,72	24,50	9,13	16,50	12,88	16,50	12,83
24,00	11,18	24,00	10,05	16,00	12,93	16,00	12,97
23,50	11,47	23,50	10,43	15,50	12,98	15,50	12,97
23,00	11,69	23,00	10,73	15,00	13,03	15,00	13,02
22,50	11,86	22,50	11,08	14,50	13,07	14,50	12,82
22,00	12,01	22,00	11,37	14,00	13,11	14,00	12,99
21,50	12,13	21,50	12,26	13,50	13,15	13,50	12,78
21,00	12,24	21,00	11,79	13,00	13,18	13,00	12,99
20,50	12,34	20,50	12,00	12,50	13,22	12,50	13,18
20,00	12,43	20,00	12,75	12,00	13,25	12,00	13,19
19,50	12,51	19,50	12,64	11,50	13,29	11,50	13,13
19,00	12,58	19,00	12,74	11,00	13,32	11,00	12,21
18,50	12,65	18,50	12,80	10,50	13,35	10,50	12,66
18,00	12,72	18,00	12,81	10,00	13,38	10,00	12,61
17,50	12,78	17,50	12,63				

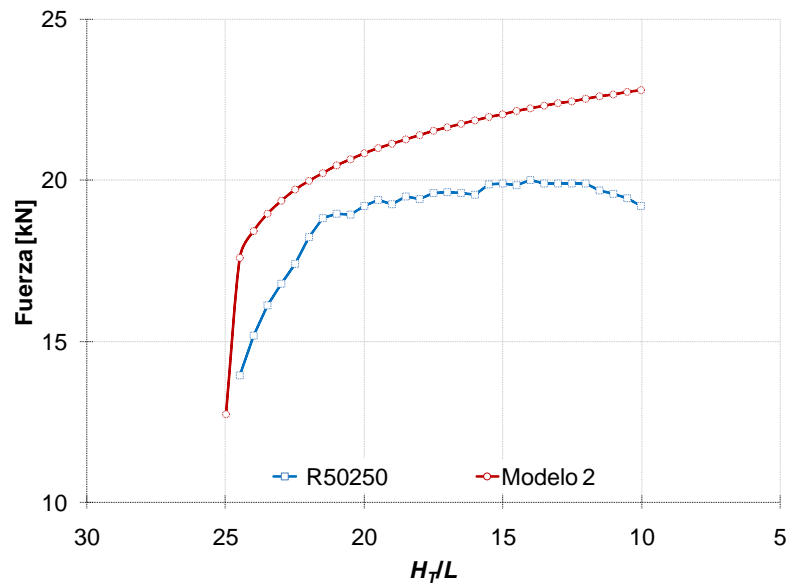


Figura 7.14: Comparativa para Titanio R50250 con endurecimiento,  $n=0,23$

Tabla 7.10: Resultados para Titanio R50250 con endurecimiento,  $n=0,23$

Modelo 2		MEF		Modelo 2		MEF	
$H_T/L$	F[kN]	$H_T/L$	F[kN]	$H_T/L$	F[kN]	$H_T/L$	F[kN]
25,00	12,73	25,00		17,00	21,64	17,00	19,62
24,50	17,59	24,50	13,95	16,50	21,75	16,50	19,60
24,00	18,41	24,00	15,17	16,00	21,85	16,00	19,54
23,50	18,95	23,50	16,12	15,50	21,95	15,50	19,87
23,00	19,37	23,00	16,79	15,00	22,04	15,00	19,91
22,50	19,70	22,50	17,42	14,50	22,13	14,50	19,83
22,00	19,98	22,00	18,24	14,00	22,22	14,00	20,00
21,50	20,23	21,50	18,83	13,50	22,30	13,50	19,88
21,00	20,45	21,00	18,96	13,00	22,38	13,00	19,89
20,50	20,64	20,50	18,94	12,50	22,45	12,50	19,90
20,00	20,82	20,00	19,19	12,00	22,52	12,00	19,90
19,50	20,98	19,50	19,39	11,50	22,59	11,50	19,68
19,00	21,13	19,00	19,25	11,00	22,66	11,00	19,56
18,50	21,27	18,50	19,49	10,50	22,73	10,50	19,44
18,00	21,40	18,00	19,40	10,00	22,79	10,00	19,20
17,50	21,53	17,50	19,60				

### 7.3.4 Resultados del Modelo de Endurecimiento 1

En el siguiente apartado se muestran los resultados obtenidos de las simulaciones para las Superafecciones seleccionadas y su identificación con el Modelo de Endurecimiento 1.

En concreto se presenta la comparación de los resultados de aplicación de este modelo, calculado mediante el TLS, frente a los resultados obtenidos mediante el MEF, para la superafección N02211 (Figura 7.15 y Tabla 7.11) y la superafección N06600 (Figura 7.16 y Tabla 7.12).

Tabla 7.11: Resultados para la superafección N02211 con endurecimiento,  $n=0,21$

Modelo 1		MEF		Modelo 1		MEF	
$H_T/L$	F[kN]	$H_T/L$	F[kN]	$H_T/L$	F[kN]	$H_T/L$	F[kN]
25,00	8,44	25,00		17,00	25,53	17,00	19,94
24,50	18,25	24,50	12,46	16,50	25,72	16,50	19,85
24,00	19,77	24,00	13,94	16,00	25,90	16,00	19,90
23,50	20,75	23,50	14,51	15,50	26,07	15,50	19,72
23,00	21,49	23,00	15,22	15,00	26,23	15,00	19,84
22,50	22,09	22,50	15,68	14,50	26,39	14,50	20,12
22,00	22,60	22,00	16,33	14,00	26,54	14,00	18,80
21,50	23,04	21,50	17,03	13,50	26,68	13,50	19,48
21,00	23,42	21,00	18,35	13,00	26,81	13,00	20,03
20,50	23,77	20,50	17,40	12,50	26,95	12,50	20,05
20,00	24,09	20,00	18,86	12,00	27,07	12,00	20,89
19,50	24,37	19,50	19,11	11,50	27,19	11,50	20,08
19,00	24,64	19,00	19,24	11,00	27,31	11,00	20,10
18,50	24,88	18,50	19,35	10,50	27,42	10,50	20,28
18,00	25,11	18,00	19,25	10,00	27,53	10,00	19,89
17,50	25,33	17,50	18,40				

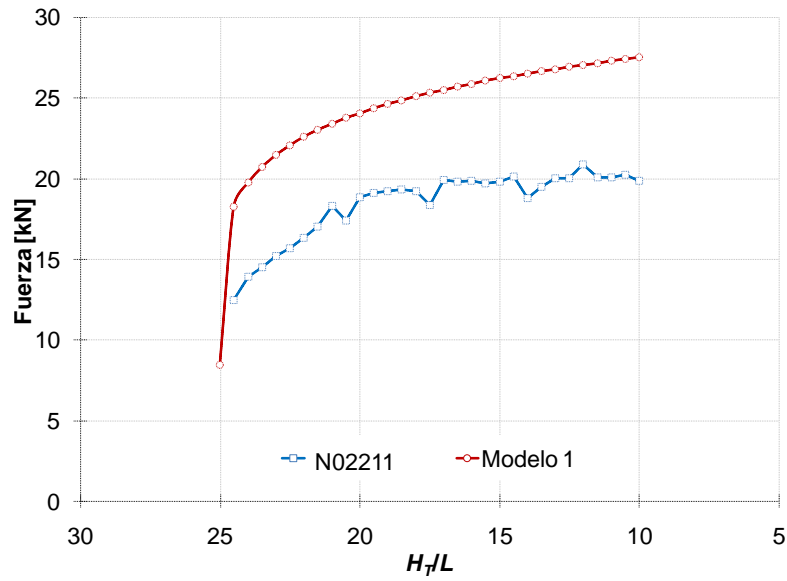


Figura 7.15: Comparativa para la superaleación N02211 con endurecimiento,  $n=0,21$

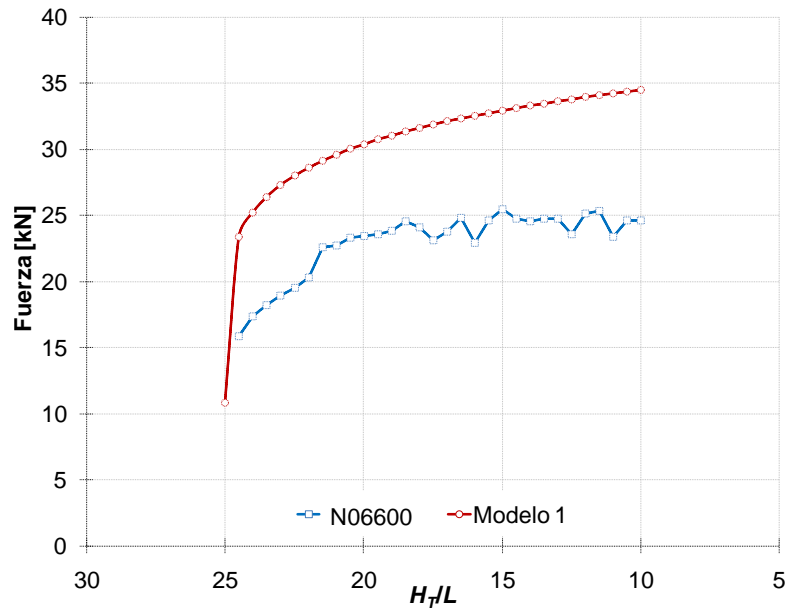


Figura 7.16: Comparativa para la superaleación N06600 con endurecimiento,  $n=0,20$

Tabla 7.12: Resultados para la superaleación N06600 con endurecimiento,  $n=0,20$

Modelo 1		MEF		Modelo 1		MEF	
$H_T/L$	F[kN]	$H_T/L$	F[kN]	$H_T/L$	F[kN]	$H_T/L$	F[kN]
25,00	10,85	25,00		17,00	32,12	17,00	23,75
24,50	23,39	24,50	15,86	16,50	32,35	16,50	24,81
24,00	25,23	24,00	17,39	16,00	32,56	16,00	22,89
23,50	26,42	23,50	18,20	15,50	32,76	15,50	24,61



23,00	27,31	23,00	18,95	15,00	32,96	15,00	25,49
22,50	28,03	22,50	19,52	14,50	33,14	14,50	24,77
22,00	28,63	22,00	20,34	14,00	33,31	14,00	24,53
21,50	29,15	21,50	22,56	13,50	33,48	13,50	24,73
21,00	29,62	21,00	22,70	13,00	33,64	13,00	24,73
20,50	30,03	20,50	23,32	12,50	33,80	12,50	23,57
20,00	30,41	20,00	23,47	12,00	33,94	12,00	25,16
19,50	30,75	19,50	23,60	11,50	34,09	11,50	25,36
19,00	31,06	19,00	23,82	11,00	34,22	11,00	23,38
18,50	31,36	18,50	24,53	10,50	34,36	10,50	24,62
18,00	31,63	18,00	24,07	10,00	34,48	10,00	24,60
17,50	31,88	17,50	23,13				

#### 7.4 Estudio Punzón Inclinado

Con el fin de abarcar el mayor número de casos posibles en el estudio de la indentación, en este apartado se va a analizar la introducción de un nuevo parámetro, en este caso correspondiente a la configuración geométrica de la herramienta utilizada en la indentación, concretamente la incorporación de la inclinación del punzón. De esta forma, mediante combinaciones futuras de los estudios de punzón plano e inclinado, se podrán alcanzar estudios de matrices más complejas.

Así, se plantea el caso de una inclinación simple (Figura 7.17), definida por el ángulo  $\alpha$ , que podrá ir variando para contemplar distintas inclinaciones del flanco del punzón.

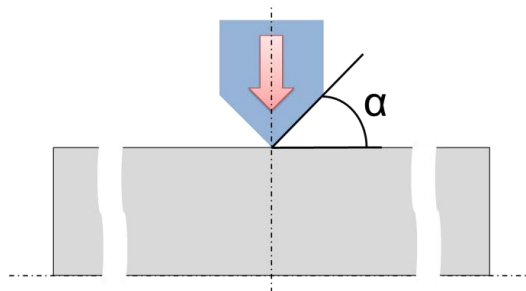


Figura 7.17: Configuración punzón inclinado

Se partirá, para ello, del modelo hasta ahora implementado como óptimo, que es el representado en la Figura 7.18

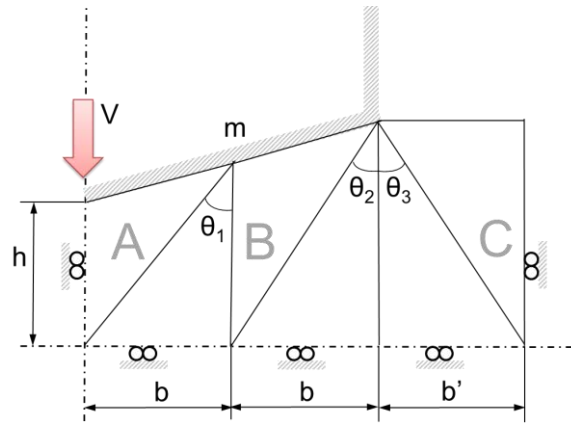


Figura 7.18: Modelo punzón inclinado

El primer inconveniente surge a la hora de plantear la penetración del punzón y la configuración del modelo mientras el punzón penetra y se produce el contacto total con la superficie de éste. En la Figura 7.18: Modelo punzón inclinado se aprecia que el modelo se encuentra en la fase estacionaria, en la que existe contacto completo con el punzón, obviando los instantes iniciales de la indentación, mostrados en la Figura 7.19.

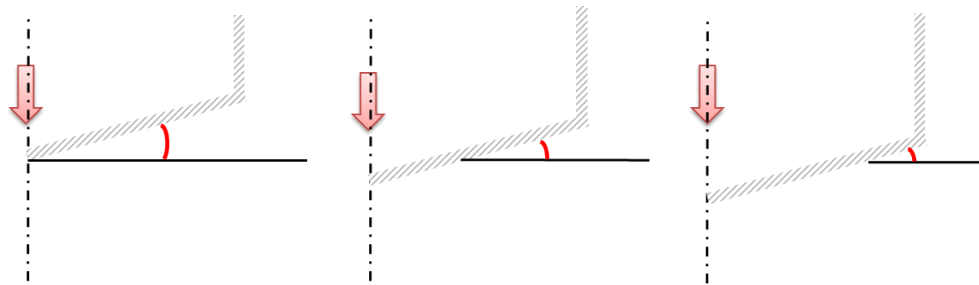


Figura 7.19: Instantes iniciales de la indentación

Por lo tanto, será necesario plantear el estudio de la fase intermedia, en la que el punzón está entrando en el material pero el contacto con la base del punzón no es total, incrementándose paulatinamente hasta llegar al contacto pleno. Este problema es similar al planteado por F. Martín [12] durante el llenado incompleto de la forja, solucionado gracias a la posibilidad de trabajo con preformas. La solución de las preformas no es factible en el caso de la indentación.

Gracias a la consideración modular implementada, será posible dividir la fase inicial en estados en los que se supondrá un contacto completo, creciendo el modelo cada vez que el punzón aumente la profundidad de penetración. Por lo tanto, se plantearán diversos problemas de espesor infinito hasta que exista un contacto total con el punzón (Figura 7.20).

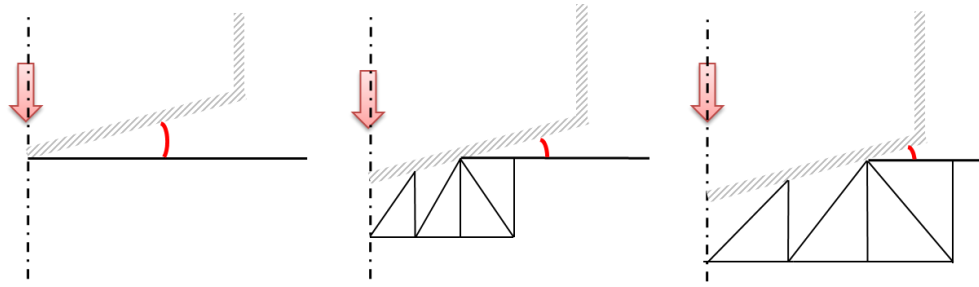


Figura 7.20: Adaptación del modelo modular

La siguiente dificultad que entraña el estudio del punzón inclinado, es concretar el modelo a seguir, partiendo del modelo óptimo considerado para los casos anteriores. De esta forma, se presentan las siguientes soluciones, haciendo todas ellas referencia a la nomenclatura de la Figura 7.21.

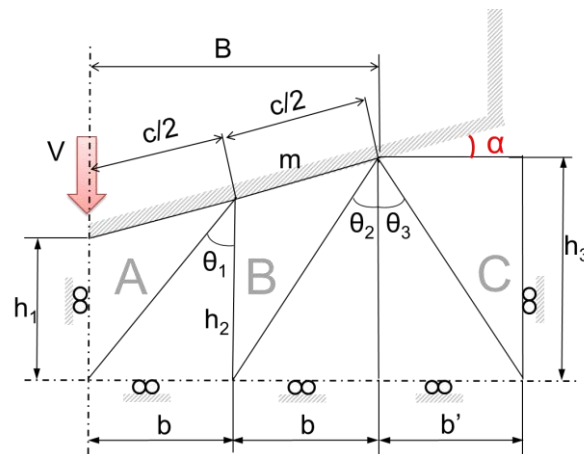


Figura 7.21: Esquema para modelo inclinado

### Opción 1

Se supone un contacto parcial del punzón con la pieza de trabajo, siendo  $B$  el equivalente al ancho del punzón en contacto y  $c$  el contacto real con la cara inclinada del mismo. Se mantiene el ángulo óptimo justificado para el caso del punzón plano ( $48,2^\circ$ ) para  $\theta_1$  y la división de los módulos, siendo  $b=B/2$ . De esta forma es posible deducir  $\theta_2$  y  $\theta_3$ , así como  $b'$ ,  $h_1$ ,  $h_2$  y  $h_3$ , quedando:

$$h_2 = b / \tan \theta_1 \quad \text{Ec. 7.10}$$

$$h_1 = h_2 - \tan \alpha \cdot b \quad \text{Ec. 7.11}$$

$$h_3 = h_2 - \tan \alpha \cdot b \quad \text{Ec. 7.12}$$

$$\tan \theta_2 = b / h_3 \quad \text{Ec. 7.13}$$

$$b' = tg\theta_3 \cdot h_3 \quad \text{Ec. 7.14}$$

Manteniendo  $\theta_2$  y  $\theta_3$  iguales.

El problema que presenta esta configuración es que conforme aumenta  $\theta_1$ ,  $h_1$  disminuye, empezando a arrojar valores negativos a partir de un  $\theta_1 = 42^\circ$ , por lo que queda descartada al ser restrictiva en cuanto a la configuración del punzón.

#### Opción 2

En esta configuración se conserva para  $h_3$  la altura óptima hallada para el punzón plano, manteniéndose como  $48,2^\circ$  únicamente el ángulo externo  $\theta_3$ . De esta forma se deduce  $\theta_1$  y  $\theta_2$ , así como  $h_1$  y  $h_2$ .

Este planteamiento vuelve a arrojar valores negativos de  $h_1$  para valores de  $\alpha = 30^\circ$ . Por lo que debe ser descartado igualmente.

#### Opción 3

Se mantiene la altura óptima para  $h_1$  y el ángulo óptimo para  $\theta_1$  y  $\theta_3$ . Las bases de los módulos dejan de ser la mitad del contacto, por lo que van variando según la penetración del punzón.

Esta configuración presenta incongruencias en la base del segundo módulo, ya que esta se ve reducida conforme aumenta la inclinación del punzón, presentando valores negativos a partir de  $\alpha = 20^\circ$ . Esta opción no es aplicable.

#### Opción 4

Mantener el ángulo óptimo establecido para la geometría plana del punzón no es posible ya que alguna de las variables relacionadas presentará valores negativos, por lo que se decide mantener la altura óptima para  $h_1$ , garantizando así que el primer módulo siempre abarcará material suficiente, sin posibilidad de que desaparezca como en los casos anteriores. Además, se vuelve a establecer que los módulos bajo la influencia directa del punzón medirán la mitad del contacto que sufren.

La siguiente consideración supone plantear los ángulos  $\theta_2$  y  $\theta_3$ . Si  $\theta_3 = \theta_2$ , siendo la base exterior igual a la base de los anteriores módulos,  $b' = b = B/2$ , los valores finales de  $p/2k$  para la consideración de pieza finita cruzan los valores de la consideración de pieza infinita cuando estos aún son menores a la unidad, cuando se trabaja con inclinaciones del punzón razonables, por lo que no puede considerarse válido el resultado.

Sin embargo, planteando  $\theta_3 = \theta_1$ , no aparece ese problema en los resultados finales, independientemente de los valores que tome  $\alpha$ .

Por lo tanto, la opción a considerar para la configuración final en el análisis del punzón inclinado será la opción 4 (Figura 7.22).

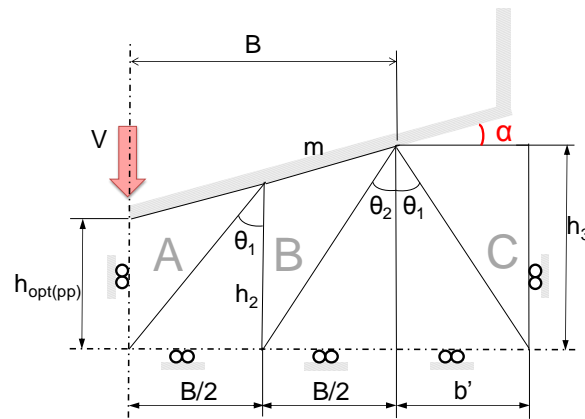


Figura 7.22: Configuración final para punzón inclinado.

Ahora bien, al realizar la comparativa con los resultados obtenidos mediante MEF, se observa que sólo existe diferencia en los valores de los esfuerzos hasta que se produce un llenado completo del punzón (Figura 7.23 y 7.24). Es decir, hasta que la zona inclinada está en contacto completo con la pieza a deformar (Figura 7.18 ). Este eje lleva esa dirección porque es penetración del punzón, no factor de forma, y aumenta conforme se avanza hacia la derecha.

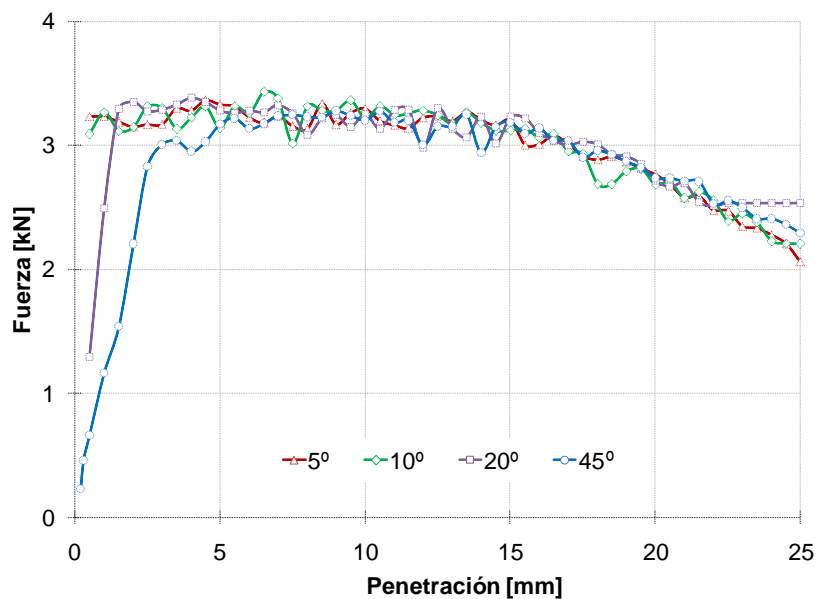


Figura 7.23: Resultados para distintos valores de inclinación

Sin embargo, en los resultados obtenidos con el TLS mediante BRT sí existe esa primera diferencia entre las pendientes para los distintos ángulos. Luego esa diferencia de valores persiste durante el resto del proceso de deformación (Figura 7.25).

Se ha realizado una comparativa con los resultados obtenidos mediante la aplicación del MEF para el punzón plano y el punzón inclinado, pudiendo constatarse que, exceptuando la zona donde la geometría inclinada del punzón aún no presenta un llenado completo, los resultados son similares, llegando a la conclusión de que únicamente será necesario aplicar las ecuaciones obtenidas para el punzón inclinado

en las primeras fases del proceso, hasta que la base del punzón ha penetrado por completo en la pieza de trabajo (Figura 7.26).

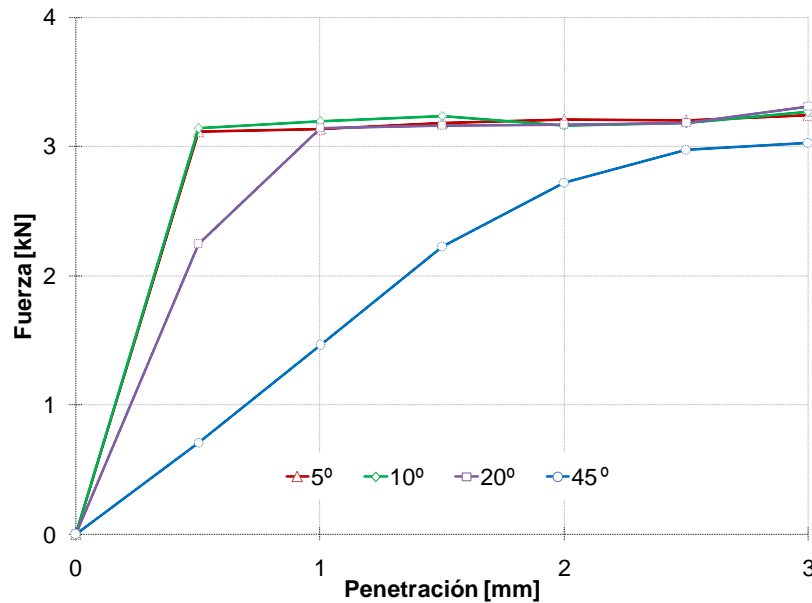


Figura 7.24: Detalle de la deformación inicial

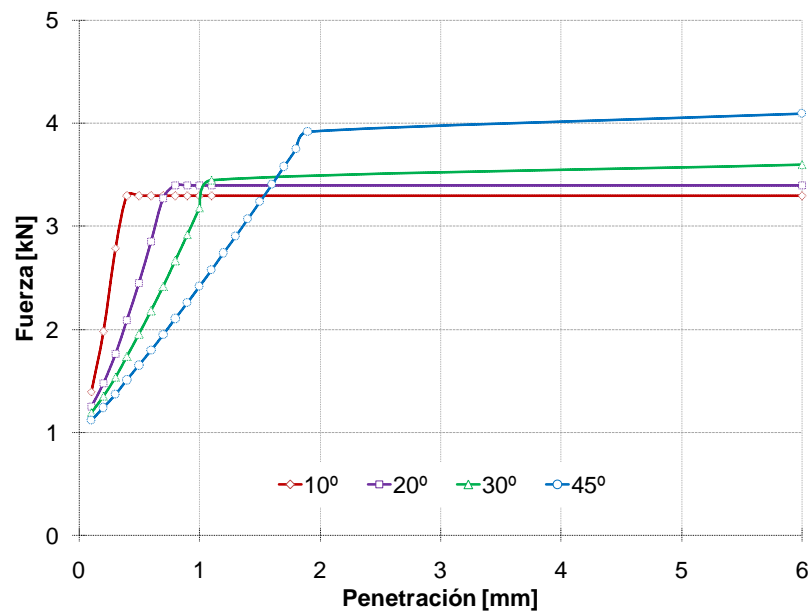


Figura 7.25: Resultados para distintas inclinaciones con TLS mediante BRT

Este comportamiento y decisión en el tratamiento en la aplicación del TLS para punzón inclinado se asemeja al comportamiento adoptado en la aplicación del CLD, donde para los casos de punzón inclinado se entiende que, una vez realizado el llenado del punzón, esta zona pasa a formar parte virtual del punzón, por lo que este puede interpretarse como un punzón plano y la zona de material que sufre mayor deformación es la que se encuentra directamente debajo de esa región.

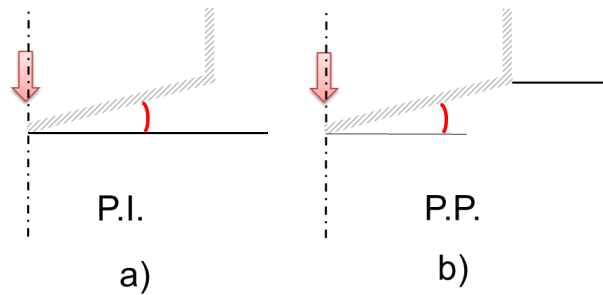


Figura 7.26: Distinción de tratamiento: Modelo de punzón inclinado a) y punzón plano b)

De esta forma ya es posible realizar una comparativa con los resultados obtenidos. En la Figura 7.27 y la Figura 7.28 se observa cómo los resultados, aplicando ambos métodos, el método analítico del TLS y el método numérico utilizado por DEFORM 2D en la resolución de simulaciones, son similares, siguiendo la aplicación del TLS comentada en el párrafo anterior.

Por lo tanto, para casos en los que se cuente con la aplicación de un punzón con cierta inclinación, será necesario la introducción del modelo para punzón inclinado únicamente en los primeros estadios del proceso de deformación. Una vez que los valores de  $p/2k$  para la aplicación inclinada superen los valores de  $p/2k$  obtenidos en la aplicación de la configuración plana del modelo, se sustituirá un modelo por otro y se podrá continuar con el modelo inicial en su configuración plana.

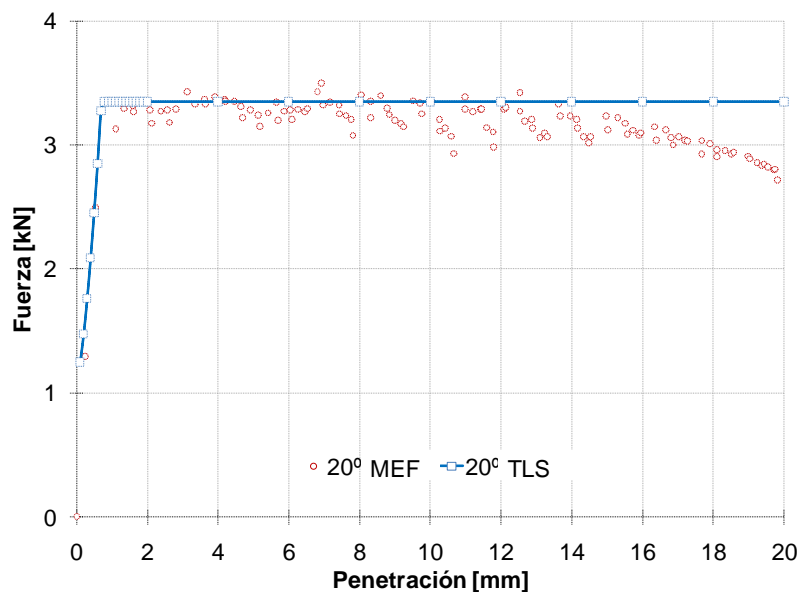


Figura 7.27: Comparativa TLS vs MEF para 20° de inclinación

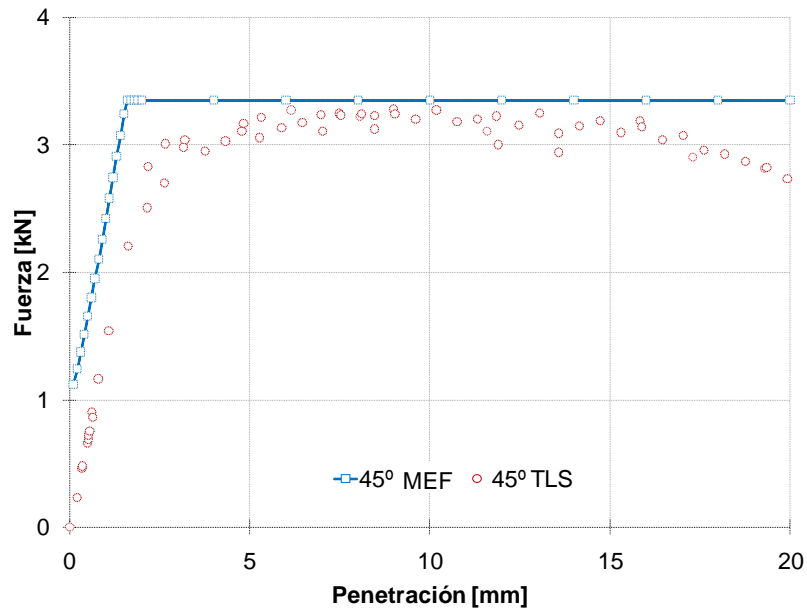


Figura 7.28: Comparativa TLS vs MEF para 45° de inclinación



## Referencias

- [1] J. W. Lieb, "Leonardo da vinci—natural philosopher and engineer," *Journal of the Franklin Institute*, vol. 191, pp. 767-806, 1921.
- [2] B. N. J. Persson and E. Tosatti, *Physics of sliding friction*: Springer, 1996.
- [3] F. Fereshteh-Saniee, I. Pillinger, and P. Hartley, "Friction modelling for the physical simulation of the bulk metal forming processes," *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 153–154, pp. 151-156, 2004.
- [4] J. Fluhrer, *Deform. Design environment for forging. User's manual*. Ohio: Scientific Forminf Technologies Corporation, 2010.
- [5] S. Kalpakjian and S. R. Schmid, *Manufacturing engineering and technology. Serope kalpakjian, steven r. Schmid*. New Jersey (USA): Prentice Hall., 2009.
- [6] J. J. Jonas and N. Christodoulou, "The onset of plastic instability in tensile samples containing deformation defects," *Scripta Metallurgica*, vol. 12, pp. 393-397, 1978.
- [7] R. C. Reed, *The superalloys: Fundamentals and applications*: Cambridge University Press, 2006.
- [8] S. Seiong, O. Younossi, and B. W. Goldsmith, *Titanium. Industrial base, price trends and technology initiatives*, 2009.
- [9] G. E. Dieter, *Mechanical metallurgy*: McGraw-Hill, 1976.
- [10] A. Matusevich, R. Mancini, and J. Massa, "Determinación del exponente "n" de endurecimiento por deformación mediante un algortimo de mínimos cuadrados ponderados," presented at the Segundo Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica, San Juan, 2010.
- [11] ASTM, "E 676-00. Standard test method for tensile strain-hardening exponents (n-values) of metallic sheet materials," ed. West Conshohocken: ASTM International, 2007.
- [12] F. Martín, "Desarrollo, integración y optimización en el estudio del proceso de forja mediante el teorema del límite superior a través del modelo de bloques rígidos triangulares," Thesis, Ingeniería de Fabricación, Universidad de Málaga, Málaga, 2009.



# CAPÍTULO 8

---

## ENSAYOS

*Análisis, Desarrollo y Validación del Método del Límite Superior en Procesos de Conformado por Indentación*

---



## Índice Capítulo 8

8.1	Equipos y herramientas.....	8.1
8.2	Elección de Material .....	8.5
8.2.1	Plomo .....	8.5
8.2.2	Estaño .....	8.7
8.2.3	Aluminio 2030 .....	8.10
8.3	Ensayos .....	8.11
8.4	Resultados .....	8.14
8.5	Ensayo de Tracción .....	8.19
8.6	Comparativa Ensayos, MEF y TLS.....	8.21



## 8. ENSAYOS

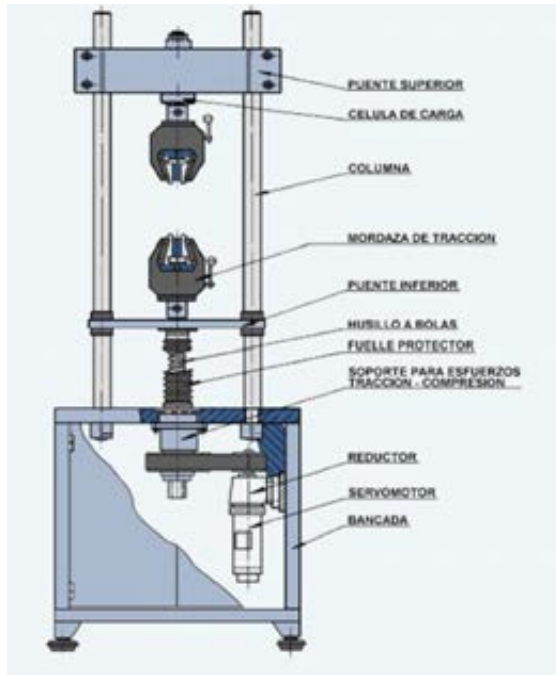
En capítulos anteriores se ha realizado una comparación de los resultados obtenidos mediante la aplicación del método analítico del TLS mediante el modelo modular de BRT frente a los determinados mediante la simulación numérica utilizando un programa de elementos finitos. Esta simulación, aunque acrecienta la confianza en la adecuación de los resultados, no permite asegurar la validez del método del TLS. Para ello, en el presente capítulo se plantea la necesidad de realizar ensayos reales de indentación con el fin de llevar a cabo una comparación con los resultados obtenidos tanto con elementos finitos como con la aplicación modular del TLS, a fin de proporcionar una validación de estos últimos. El presente capítulo describe la metodología de ensayos seguida, así como las herramientas disponibles durante los mismos y los resultados alcanzados.

### 8.1 Equipos y herramientas

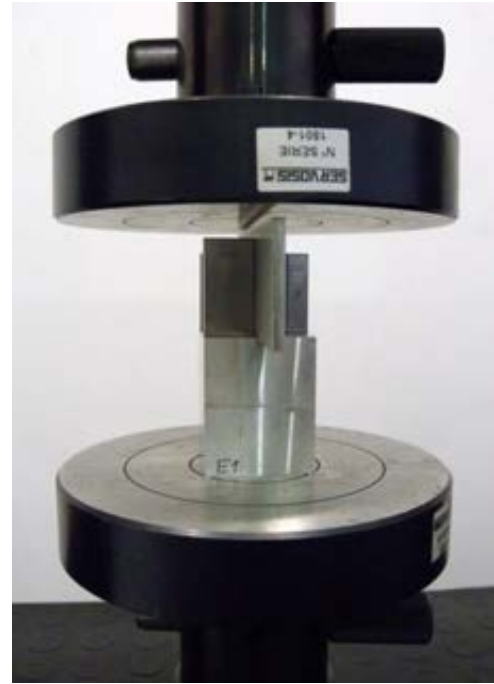
Se ha utilizado la máquina de ensayos de tracción mostrada en la Figura 8.1 a. Dicha máquina alcanza un esfuerzo máximo de 10 t, por lo que, como se verá en los apartados posteriores, la elección del material para llevar a cabo la indentación debe ser realizada atendiendo a este límite para garantizar la deformación de la probeta.

La máquina de ensayo pertenece a la serie ME 405/10, con un bastidor de 100kN, de la empresa Servosis, y se encuentra catalogada como *Máquina de ensayo de tracción/compresión/flexión 0,1-30 t* (Figura 8.1 b), existiendo la posibilidad de alcanzar las 30 t con un módulo suplementario no disponible en el momento de la realización de los ensayos.

El control de la máquina puede ser realizado de forma manual o a través de ordenador, mediante el programa específico PCD2K. Permite velocidades de desplazamiento que varían entre una máxima de 100 mm/min y una mínima de 0.0001 mm/min. La precisión en la medida de los canales analógicos de fuerza y desplazamiento cumple con la Clase 1 de la Norma EN-7500-1 [1].



(a)



(b)

Figura 8.1: Máquina de ensayos (a) y accesorios para ensayos de compresión (b)

Fuente (a): Manual de servicio Servosis

Para el centrado del indentador en las distintas probetas de ensayo, se ha hecho uso de bloques patrones longitudinales (Figura 8.2 a y b).



(a)



(b)

Figura 8.2: Bloques patrones. Sumatorio (a) y bloque único (b)

Gracias al acabado de sus caras paralelas, es posible adherir unos bloques a otros con un simple deslizamiento (Figura 8.2 a), con el fin de materializar la medida requerida, con escalonamientos de hasta 0,5 mm, dependiendo del juego de bloques utilizados.

Posteriormente, para evitar el deslizamiento del indentador sobre los platos de compresión (Figura 8.1 b), fue necesaria la fabricación del útil mostrado en la Figura 8.3. Éste se compone de una base donde se sitúan dos tornillos de apriete y contiene una zona de apoyo para el indentador (Figura 8.3 a). La barra de apriete se sitúa entre



los tornillos y el indentador, con el fin de garantizar un apriete homogéneo en el indentador y evitar zonas puntuales de abrasión en la realización del ensayo.

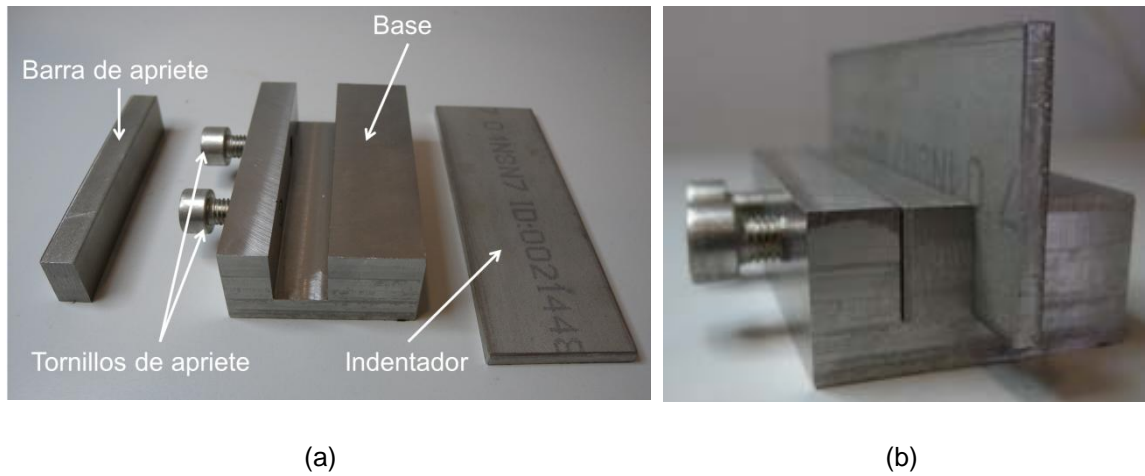


Figura 8.3: Útil de compresión (a), útil compuesto (b)

Una vez compuesto el conjunto (Figura 8.3 b), el útil de compresión garantiza una mayor base de apoyo al indentador sobre los platos que la del propio indentador, evitando así la inclinación de éste durante el proceso de conformado (Figura 8.4).



Figura 8.4: Fallo de inclinación en el ensayo de E3

Por su parte, el indentador, fabricado en acero 304, ha pasado por un proceso de fresado para conseguir que la base del mismo fuese plana (Figura 8.5). El indentador se obtiene de una plancha de acero de dimensiones mayores, la cual tiene los cantos redondeados, siendo ese redondeamiento el que se elimina mediante el fresado (Figura 8.6).



Figura 8.5: Fresado del canto del indentador



(a)



(b)

Figura 8.6: Indentador con base irregular (a), indentador después del fresado (b)



Figura 8.7: Sistema Electromecánico de Testeo

Para obtener la caracterización de los materiales utilizados se ha empleado una máquina de tracción (Sistema Electromecánico de Testeo, Figura 8.7).

Este equipo permite recoger los resultados del ensayo en una gráfica tensión-deformación, así como trabajar posteriormente con los datos obtenidos guardados un documento txt, permitiendo su manipulación en documentos Excel.

Por último se cuenta también con un horno (Figura 8.8) utilizado para recocer el aluminio y permitir así la consecución de la indentación en la máquina de ensayos (Figura 8.1). Mediante el recocido y el posterior enfriado lento, es posible reducir el esfuerzo necesario para deformar el material y conseguir llevar a cabo la indentación deseada dentro del rango de las 10 t

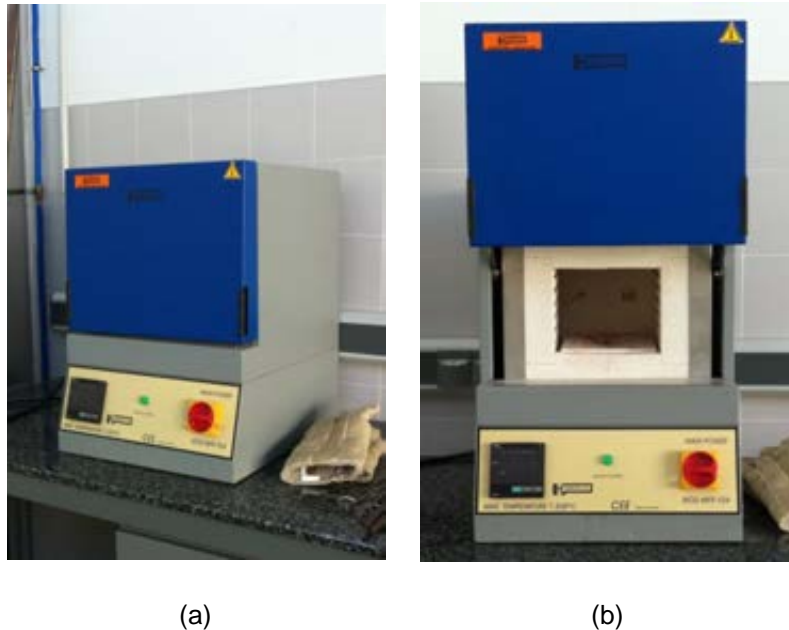


Figura 8.8: Horno de recocido. Exterior (a) e interior (b)

## 8.2 Elección de Material

Como se ha comentado en el apartado anterior, la máquina de ensayos disponible para llevar a cabo los ensayos de indentación tiene un rango limitado de esfuerzos y, por tanto, el material utilizado para las probetas debe ser capaz de presentar una deformación apreciable con esfuerzos menores a 10 t. Además, se persiguen indentaciones que se alejen lo más posible de los ensayos comunes de dureza, que producen indentaciones superficiales, por lo que las penetraciones deben ser más profundas, llegando a alcanzar varios mm.

Por tanto, se consideran distintos materiales hasta seleccionar el adecuado para llevar a cabo los ensayos de indentación.

### 8.2.1 Plomo

El Plomo es un metal pesado, de color plateado azulado. Se considera flexible, inelástico y se consigue su fundición con relativa facilidad, produciéndose ésta a 327°C aproximadamente y llegando a ebullición a 1725°C. Ofrece, entre otras

ventajas, un punto de fusión bajo y una maleabilidad extrema, lo que permite su fácil moldeo. En la industria, se emplea mayormente aleado, gracias a su facilidad para conseguir aleaciones con diversos metales. No obstante, es un material muy tóxico y su uso debe realizarse extremando las precauciones.

Rara vez se encuentra en estado puro, estando presente generalmente como sulfuro de plomo en la galena. También puede encontrarse plomo en minerales como el uranio y el torio, proveniente de la desintegración radiactiva. Se obtiene mediante la trituración de estos minerales, llevando a cabo una concentración del plomo mediante flotación por espuma. Otro proceso es el tueste de los minerales constituidos por sulfuros. Este proceso produce óxido de plomo, que se verá reducido en coque de alto horno para obtener el plomo.

Su uso industrial más amplio se produce en la fabricación de acumuladores, así como en la fabricación de forros para cables, elementos de construcción y de soldadura. Gracias a la resistencia que presenta a la corrosión por parte de diversos ácidos, su uso es amplio en la industria química para el tratamiento y manejo del ácido sulfúrico y nítrico. Otro uso generalizado se encuentra en las pantallas protectoras para máquinas de rayos X y en blindajes contra la radiación en general.

Este metal se plantea como primera opción para la fabricación de las probetas debido a su fácil conformado. Comparado con otros metales, tiene poca resistencia mecánica, lo que lo hace idóneo para los ensayos, unido a su tendencia a fluir y a la poca capacidad frente a la fatiga. El plomo es un metal que se aproxima al comportamiento ofrecido por un material rígido-plástico perfecto. Presenta la ventaja de un fácil manejo en la fabricación de las probetas utilizadas para el ensayo y permite indentaciones profundas, del orden de más de la mitad de la altura de la probeta.

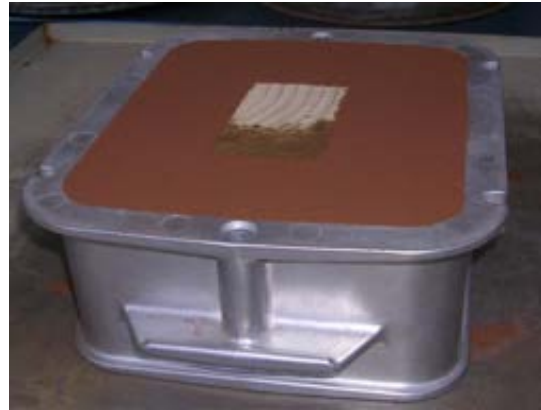
Las probetas se fabricaron mediante fundición en arena. Para ello se ha fundido el plomo y vertiéndolo en el molde mostrado en la Figura 8.9, obteniendo un lingote de plomo que, posteriormente, se mecanizará hasta obtener una probeta de dimensiones adecuadas (50 x 50 x 30 mm).

Debido a la maleabilidad del plomo, es posible practicar un mallado en la parte frontal de la probeta para estudiar la Deformación posterior y compararla con la obtenida mediante los programas de elementos finitos utilizados (Figura 8.10). Además, los esfuerzos de compresión se han mantenido en un rango inferior a 3 t, para indentadores con superficie de apoyo reducida, lo que permitiría trabajar con indentadores mayores y piezas más grandes.

No obstante, se plantea la dificultad de localizar un suministrador adecuado para este tipo de material, que facilite la documentación necesaria para la implementación del ensayo en el modelo final del TLS mediante módulos de BRT. Esta problemática, unida al comportamiento inestable del plomo a las distintas velocidades de deformación implementadas, ha supuesto que se desestime la posibilidad de trabajar con este material para futuros ensayos de indentación.



(a)



(b)

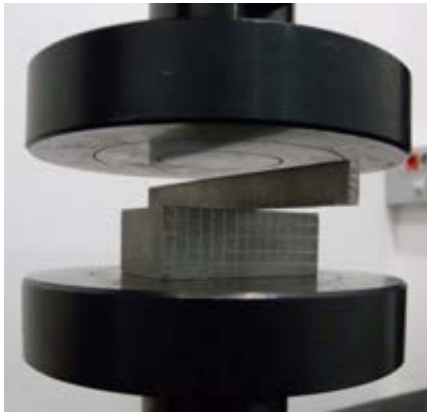


(c)

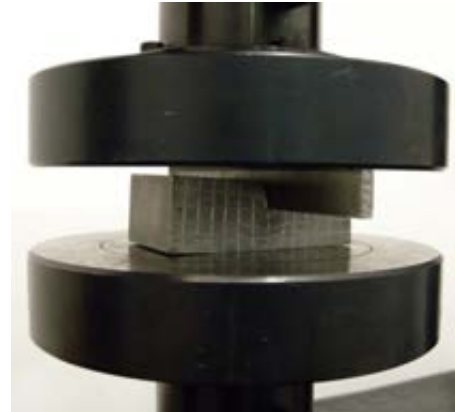


(d)

Figura 8.9: Fabricación de probeta de Plomo. Molde y Modelo (a), moldeo en arena (b), enfriamiento de probeta (c) y lingote en bruto final (d)



(a)



(b)

Figura 8.10: Probeta ensayo sin indentar (a), indentada (b)

### 8.2.2 Estaño

El estaño comparte parte de sus características con el plomo. Es un metal plateado y maleable, que no se oxida con facilidad y es resistente a la corrosión. El estaño ordinario tiene su punto de fusión a  $232^{\circ}\text{C}$  y el de ebullición a  $2260^{\circ}\text{C}$ . En

general puede encontrarse en diversas aleaciones y tiene un uso extendido como recubrimiento de otros metales para protegerlos de la corrosión.

Está presente como óxido en la casiterita. Este mineral se muele para posteriormente obtener el dióxido de estaño por flotación, tostarlo y calentarlo con coque en un horno de reverbero.

Su uso en la industria se centra, principalmente, en los procesos de soldadura blanda aleado con plomo, así como protector del cobre, hierro y diversos materiales utilizados en latas de conserva. Su uso en la industria alimenticia se vio propiciado tras la prohibición del uso del plomo. También puede encontrarse aleado con Titanio en la industria espacial

El estaño es un material de comportamiento similar al plomo pero su abastecimiento resulta menos complicado. Actualmente el área de Ingeniería de Fabricación de la Universidad de Málaga cuenta con un suministrador de estaño para el empleo de este material, en formato de varillas (Figura 8.11), para las prácticas de fundición programadas en distintas titulaciones, disponiéndose de la hoja técnica de información del mismo.



Figura 8.11: Varillas de estaño

El método de fabricación de las probetas de estaño es similar al de las probetas de plomo. Se funde el material y se vierte en un molde alargado, el cual permitirá la obtención de un solo lingote de estaño, del cual se obtendrán varias probetas finales (Figura 8.12).

Posteriormente se someten las piezas, individualmente, a un mecanizado, con el fin de trabajar con una probeta de dimensiones adecuadas y garantizar el paralelismo entre sus caras (Figura 8.13).

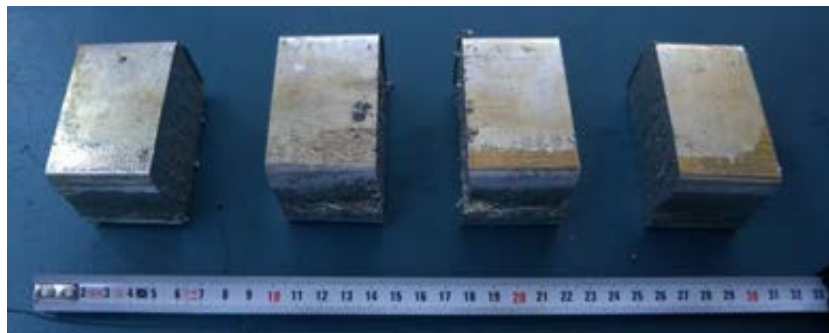
Pese a ser un metal muy maleable y presentar poca resistencia a la indentación (Figura 8.14), los resultados obtenidos, al igual que con el plomo, resultan inestables al variar el parámetro de la velocidad del indentador. El endurecimiento por deformación aumenta de forma desproporcionada y los valores obtenidos, incrementando ligeramente la velocidad del ensayo, resultan mucho más elevados que los anteriores.



Unidos estos argumentos al poco uso del estaño en la industria manufacturera fuera del ámbito de la soldadura, se llega nuevamente a desestimar éste.

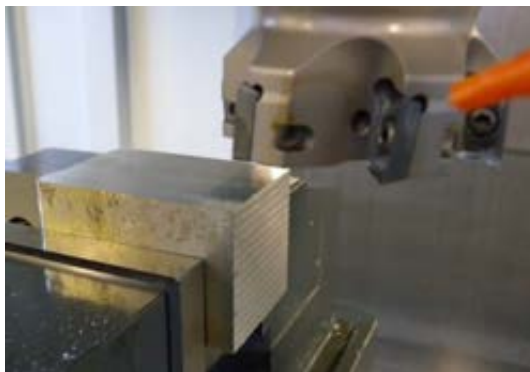


(a)

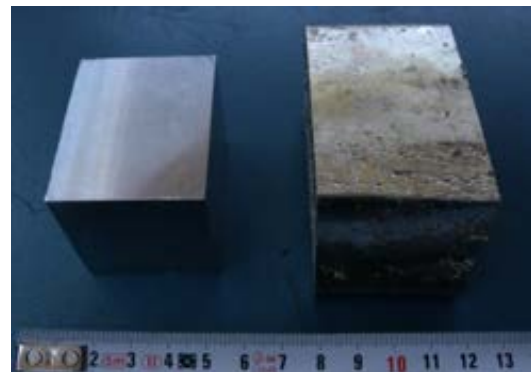


(b)

Figura 8.12: Lingote de estaño (a), probetas en bruto (b)



(a)



(b)

Figura 8.13: Mecanizado probeta estaño (a), probeta final frente a inicial (b)

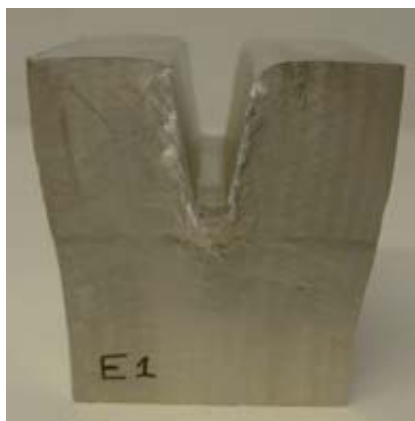


Figura 8.14: Probeta de estaño post ensayo

### 8.2.3 Aluminio 2030

Ante la imposibilidad de emplear en la máquina de ensayos otros metales más comunes dentro de la industria, como puede ser el aluminio, debido al límite en el esfuerzo de 10 t, se plantea la posibilidad de someter a este material a un proceso de recocido y obtener, posteriormente, la caracterización de éste mediante ensayos de tracción.

El aluminio es uno de los principales metales que pueden encontrarse en la corteza terrestre. Al igual que los anteriores metales citados, no es posible encontrarlo en estado puro, formando parte de distintos minerales, entre los que se encuentran la alúmina ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ ), el óxido de hierro ( $\text{Fe}_2\text{O}_3$ ) y el dióxido de silicio ( $\text{SiO}_2$ ). La obtención del aluminio se lleva a cabo, esencialmente, mediante electrolisis.

Es un metal blanco brillante, pudiéndose asemejar a la plata una vez pulido. Junto con el magnesio, es uno de los metales más ligeros de la industria. Su punto de fusión se encuentra a  $660^\circ\text{C}$  y el de ebullición a  $2450^\circ\text{C}$ . Presenta una gran ductilidad y maleabilidad, aunque no de forma tan acusada como el estaño y el plomo, lo que permite su fácil manejo en la forja, trefilado y diversos procesos de deformación plástica.

Es un metal ampliamente utilizado en la industria, con multitud de aplicaciones. Las primeras aplicaciones comerciales que se le conocen fueron para objetos exclusivos de la nobleza, como en marcos para los espejos o bandejas de servir. Con el tiempo, su desarrollo comercial ha crecido de tal forma que bien puede decirse que casi cualquier aspecto de la vida moderna está directa o indirectamente relacionado con su uso [2].

La característica más importante del aluminio es su versatilidad. Desde su estado más puro hasta la más compleja de las aleaciones, el rango de características mecánicas que pueden conseguirse es muy amplio. Su bajo peso específico lo hace idóneo para la fabricación de aleaciones ligeras, utilizadas en construcciones aeronáuticas o vehículos de transporte, entre otros. A su vez, su alta conductividad eléctrica lo hace apto para la fabricación de conductores eléctricos. Además, su uso se



extiende a utensilios de cocina gracias a su conductividad calorífica, papel de aluminio por su maleabilidad, depósitos de ácido, cerveza, etc., por su resistencia a la corrosión y por sus propiedades reductoras lo hacen útil para la desoxidación del hierro y otros metales. Por tanto, se aprecia la necesidad de trabajar con un metal como el aluminio, tan cercano a la industria cotidiana.

Considerando el aluminio EN AW-2030 (UNE-EN 573-1) [3] y gracias al proceso de recocido al que se someterán las probetas, es posible reducir la resistencia del aluminio considerado y trabajarlo dentro del rango de esfuerzos que permite la máquina de ensayos. Se realiza una batería de ensayos de prueba para asegurar la deformabilidad del material, utilizando para ello probetas cilíndricas y un indentador de 4 mm de base. Como se muestra en la Figura 8.15, la indentación es factible después del proceso de recocido del material.



Figura 8.15: Indentación en Al 2030

Por tanto, se selecciona finalmente el aluminio EN AW-2030 para realizar los ensayos de indentación posteriores, cuyos resultados serán comparados con los obtenidos el MEF y el TLS mediante su aplicación modular óptima.

Para las aleaciones de aluminio se utiliza un sistema de cuatro dígitos para su identificación. De acuerdo a esta codificación, el material seleccionado para los ensayos, sería el 2xxx, siendo esta una aleación en la cual el principal aleante es el cobre, pudiendo existir otros elementos, en su mayor medida magnesio, estando éstos identificados mediante porcentajes.

### 8.3 Ensayos

Seleccionado el material y comprobada su capacidad de deformación dentro del rango ofrecido por la máquina de ensayos disponible, se procede a configurar los ensayos de indentación.

Con el fin de catalogar cada uno de los ensayos, se confecciona una codificación para identificar cada una de las probetas indentadas, de la siguiente forma:

EX1-A1-X2-X3-A2-X4-A3-X5

Siendo:

X1: Número de ensayo

A1: Consideración de probeta Finita (F) o Infinita (I)

X2: Velocidad (en mm/s o mm/min)

X3: Mitad de la anchura del punzón

A2: Pieza con simetría (C) horizontal o sin simetría (S)

X4: Profundidad de la indentación

A3: Material de la probeta

X5: Dimensiones de la probeta (mm)

En cuanto al material suministrado, se cuenta con una barra de dos metros de sección cuadrada de 50 x 50 mm, la cual se secciona según la profundidad requerida.

Las dimensiones de las probetas finales serán de 50 x 50 x 30 mm (Figura 8.16). Para trabajar considerando una deformación plana, es esencial que la profundidad de la pieza sea de 6 a 10 veces mayor que el ancho de la superficie donde se aplica el esfuerzo [4], en este caso la superficie plana del indentador. Como se trabaja con una indentador de Acero AISI 304 de base 3mm, la profundidad seleccionada es de 30mm.

Como se ha indicado en apartados anteriores, para conseguir una deformación apreciable es necesario, someter a las probetas a un proceso de recocido, que elimine las tensiones residuales del material. Tanto las probetas para los ensayos de indentación como las probetas que se someterán al ensayo de tracción se han sometido al mismo tratamiento térmico, mostrado en la Figura 8.17

Por último, para estudiar el comportamiento de las probetas frente al endurecimiento por deformación, se someterán a distintas velocidades de deformación, siendo éstas 60 mm/min y 4 mm/min.

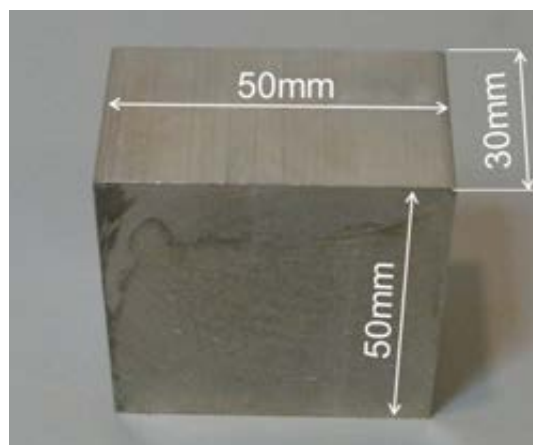


Figura 8.16: Probeta de aluminio EN AW-2030 Recocido

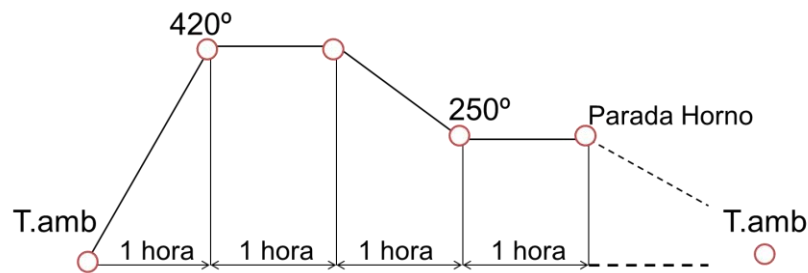


Figura 8.17: Tratamiento térmico de Recocido.

Al igual que con los materiales anteriores, se utilizan Bloques Patrones Longitudinales para centrar el indentador en la probeta, así como el útil de sujeción para evitar que el indentador resbale en el plato de compresión y ejerza un esfuerzo inclinado en la probeta, impidiendo que la indentación se lleve a cabo de manera apropiada (Figura 8.18).

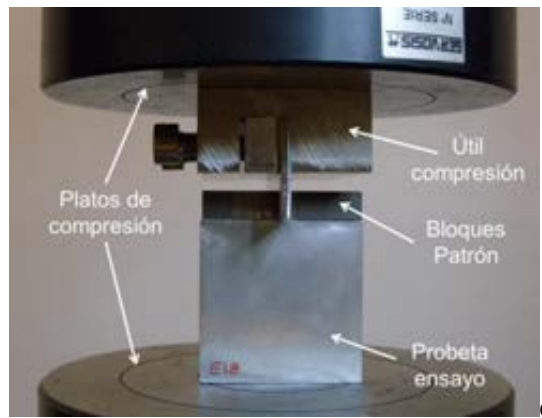


Figura 8.18: Posicionamiento de la probeta sin carga

Una vez posicionado cada instrumento de trabajo, se realiza una precarga de 50 N que permitirá retirar los Bloques Patrones Longitudinales del montaje, dejando únicamente el indentador interaccionar con la probeta (Figura 8.19).

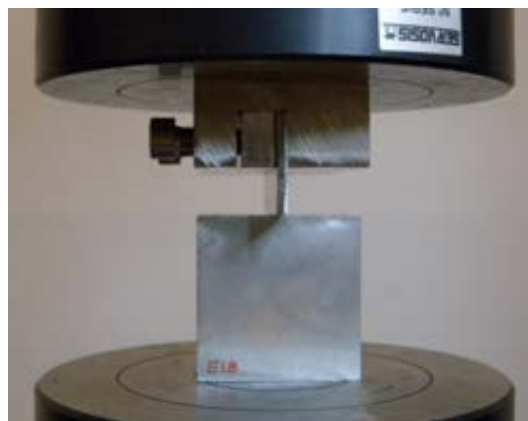


Figura 8.19: Probeta precargada

A continuación se programa la máquina de ensayos para que alcance una penetración de 6 mm de profundidad y se inicia la indentación.

## 8.4 Resultados

El software utilizado para la máquina de ensayos permite recoger, en un documento en formato .txt, los datos que se muestran a continuación, expresados en las siguientes unidades:

- Tiempo del proceso → segundos
- Fuerza del indentador → toneladas
- Posición del indentador → milímetros

Esta gestión permite organizar los datos obtenidos en una hoja Excel, de la que se pueden extraer las gráficas necesarias para la comparativa posterior. Así, para los distintos ensayos realizados, se obtienen resultados como los mostrados en la Tabla 8.1 y gráficos como la Figura 8.20.

Tabla 8.1: Resultados E19-I-4mm/m-1.5-S-6-Al2030R-50x50x30

Probeta E19		
Tiempo [s]	Fuerza [kN]	Posición [mm]
7,94	-0,32	-0,03
22,74	-38,43	-1,01
30,20	-48,89	-1,50
38,04	-55,11	-2,01
45,40	-59,09	-2,50
53,24	-62,16	-3,02
60,60	-64,46	-3,51
68,04	-66,40	-4,00
75,80	-67,98	-4,52
83,24	-69,40	-5,00
91,10	-70,78	-5,52
98,46	-72,12	-6,01

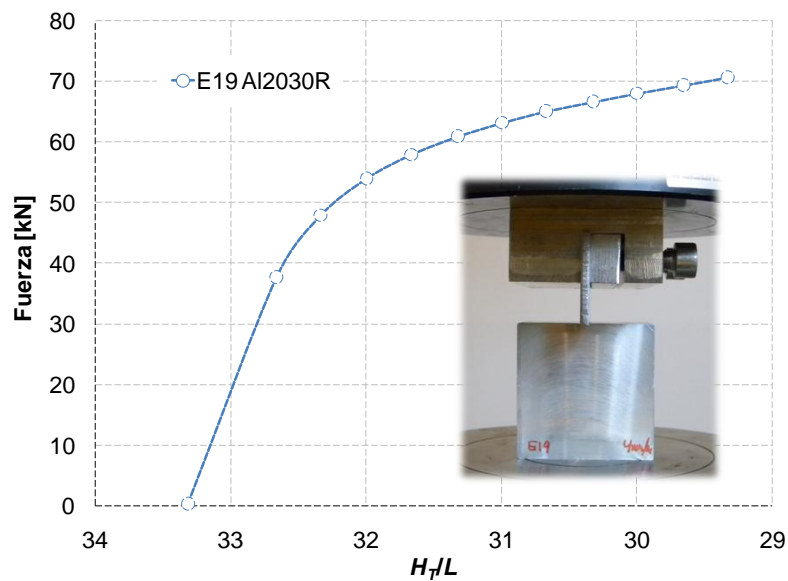


Figura 8.20: Resultados de E19-I-4mm/m-1.5-S-6-Al2030R-50x50x30

De esta forma, la primera comparación realizada se lleva a cabo entre las muestras indentadas a la misma velocidad. En la Figura 8.21 se muestran los resultados para indentaciones de 4 mm/min y en la Figura 8.22 los resultados a 60 mm/min.

Por último, se realiza una comparación de los ensayos a distintas velocidades para ver la influencia del endurecimiento por deformación que, como se aprecia en la Figura 8.23, no es considerable

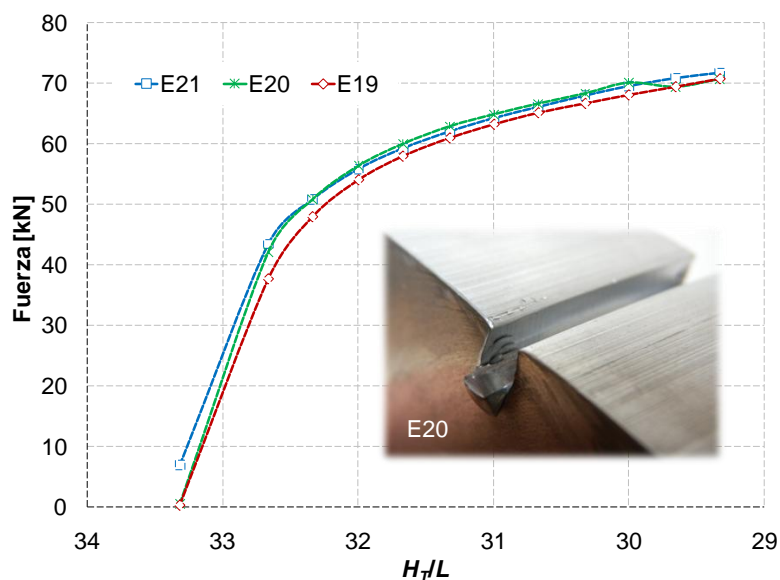


Figura 8.21: Ensayos E19, E20 y E21 a 4 mm/min

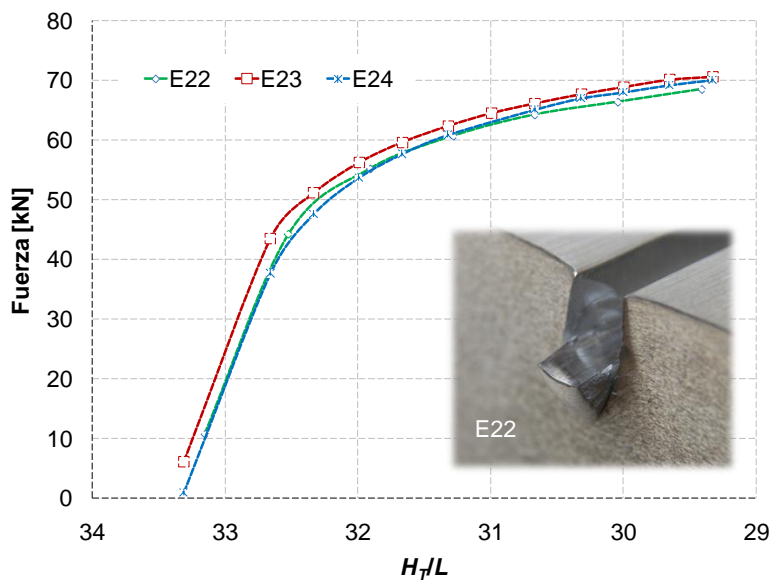


Figura 8.22: Ensayos E22, E23 y E24 a 1 mm/s

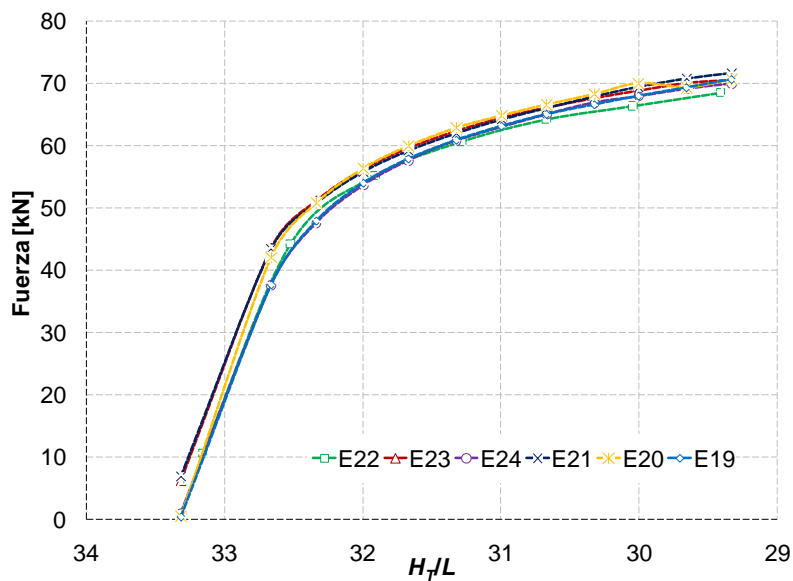


Figura 8.23: Comparativa entre ensayos a 4mm/min y 1mm/s

Que no exista una diferencia considerable entre los esfuerzos obtenidos a distintas velocidades representa el comportamiento normal del metal bajo los efectos de la deformación. En efecto, <<... A temperatura ambiente, el efecto de la velocidad de deformación es casi despreciable [...]. A medida que aumenta la temperatura, la velocidad de deformación juega un papel más importante en la determinación del esfuerzo de fluencia [...]. Se puede observar que aun en el trabajo en frío, la velocidad de deformación puede tener un efecto mínimo sobre el esfuerzo de fluencia...>> [5]

Para las futuras comparaciones con los resultados obtenidos con MEF y con TLS, se realiza una media de los resultados obtenidos mediante los ensayos, siendo la gráfica resultante la mostrada en la Figura 8.24

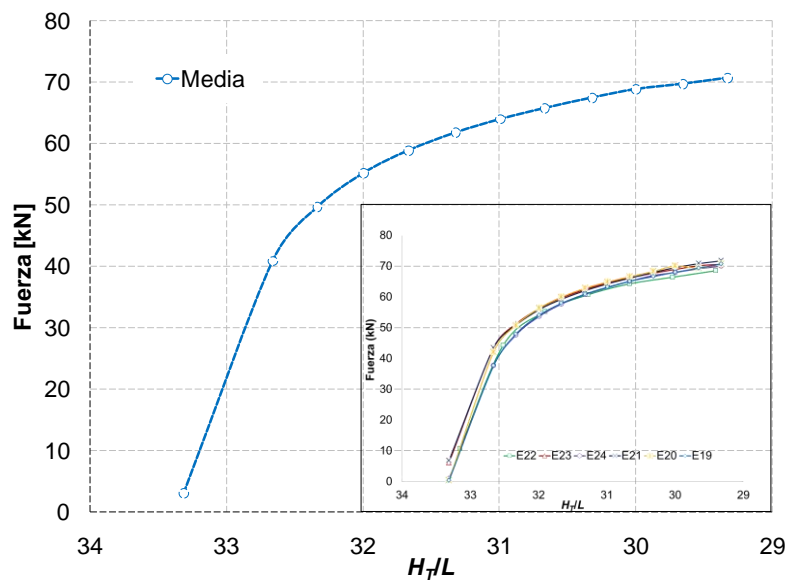


Figura 8.24: Media de E19-E22

En cuanto al indentador, en las pruebas previas realizadas sobre probetas cilíndricas y con un indentador de 4 mm de base, éste no sufría deformación apreciable. No obstante, para los ensayos finales, trabajados con indentador de 3 mm de base, éste sí sufre una pequeña deformación que debe ser tomada en cuenta a la hora de realizar la comparación con los otros métodos utilizados, tal como se muestra en la Figura 8.25 y Figura 8.26.

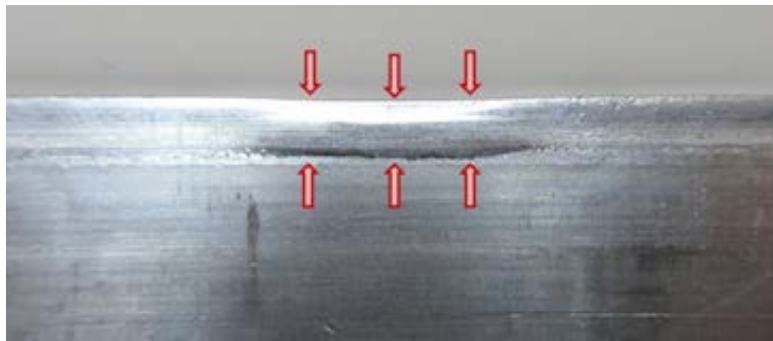


Figura 8.25: Deformación indentador lateral

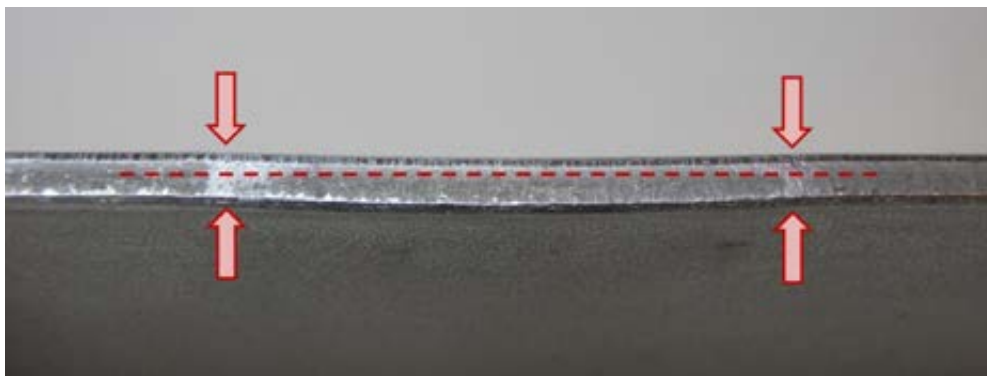


Figura 8.26: Deformación indentador frontal

Ésto se debe al aumento de la superficie de deformación en cuanto a profundidad de la probeta y a la reducción, a su vez, de la superficie de apoyo del indentador, así como al aumento de la superficie superior de la pieza, lo que incrementa el empuje del material a desalojar. Esta superficie se reduce para compensar el aumento que se produce al trabajar con una probeta cuadrada, con mayor profundidad que la cilíndrica y poder realizar la indentación dentro del rango de esfuerzos que ofrece la máquina de ensayos utilizada.

En cuanto a la probeta, la deformación producida no llega a ser completamente plástica y se producen ciertas roturas de carácter frágil en los extremos del indentador, no ocurriendo lo mismo en la zona interior de la probeta. En la Figura 8.27 se muestran las pequeñas roturas producidas en el material con una indentación de 6 mm.

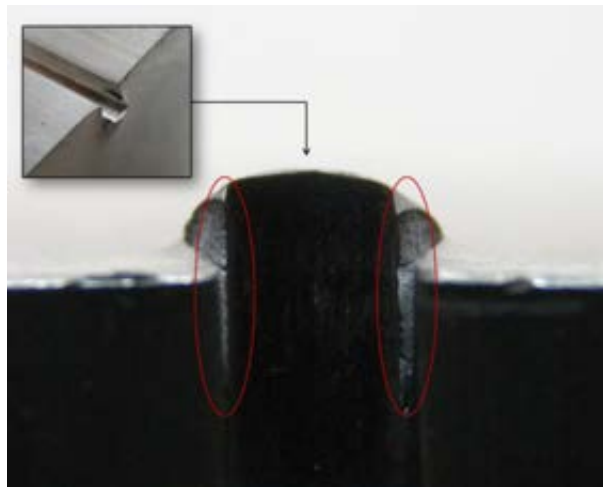


Figura 8.27: Rotura en el extremo de la probeta, vista superior

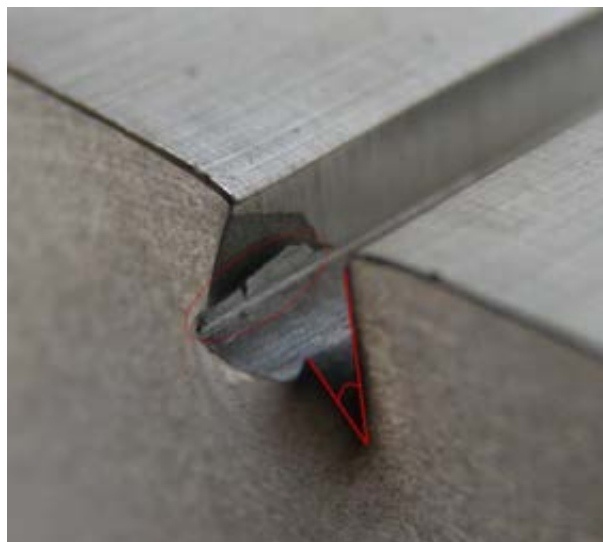


Figura 8.28: Rotura en el extremo de la probeta, vista lateral

En la Figura 8.28 se aprecia cómo la fisura y rotura del material se detiene a pocos milímetros del borde de la probeta, sufriendo en su mayoría una deformación plástica, como se esperaba del ensayo de indentación. De esta forma, los resultados



se podrán comparar con los obtenidos con los métodos tratados, mediante las consideraciones precisas.

### 8.5 Ensayo de Tracción

Como se ha expresado en párrafos anteriores, para conseguir la indentación en las probetas de aluminio EN AW-2030, ha sido necesario someter a cada probeta a un recocido. Una vez que el material sufre dicho recocido, las características del aluminio EN AW-2030 cambian. Por tanto, para conocer las nuevas propiedades del material con el que se trabaja y poder, posteriormente, obtener los parámetros necesarios para la implementación del TLS mediante BRT desarrollado, es preciso caracterizarlo mediante la ejecución de un ensayo de tracción.

Tal y como se ha indicado anteriormente, para los ensayos de tracción se cuenta con la máquina de tracción identificada en la Figura 8.7).

Se han preparado una serie de probetas (Figura 8.29) extraídas del mismo bloque de material del que se obtienen las probetas para indentación, y se han sometido al mismo ciclo de recocido.



Figura 8.29. Muestras de las probetas para los ensayos de tracción

Las probetas utilizadas para el ensayo de tracción se han fabricado de acuerdo a la normativa ISO 6892\_1210 [6], referente a ensayos de tracción a temperatura ambiente en materiales metálicos, a partir de la barra de sección cuadrada de 50 x 50 mm, mecanizada hasta obtener una barra de sección circular de 30 mm de diámetro. En la Figura 8.30 se aprecian las medidas finales de la probeta normalizada.

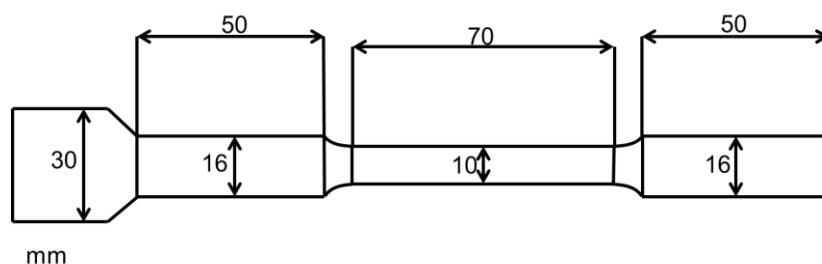


Figura 8.30: Esquema de la probeta para el ensayo de tracción

A fin de mostrar la diferencia existente entre el material después de haberse sometido al ciclo de recocido y el material de la forma inicial suministrada, una de las probetas no se someterá al ciclo de recocido. De esta forma se aprecia que la ruptura producida para las probetas recocidas es dúctil (Figura 8.31a), mientras que para la probeta sin recocer se produce una ruptura frágil (Figura 8.31b). Esto también facilitará el ensayo de tracción, ya que con un material más frágil sería más difícil producir una deformación plástica sin producir grandes fisuras en la probeta.

En la Figura 8.32 se muestran los resultados obtenidos para la probeta sin recocer y en la Figura 8.33 los resultados de la probeta una vez recocida. Se aprecia que gracias al proceso de recocido es posible reducir el esfuerzo necesario para producir una deformación permanente en el material (de 300 MPa a 120 MPa aprox.), lo que posibilita el uso de la máquina de ensayos disponible para llevar a cabo la indentación requerida.



Figura 8.31. Ruptura dúctil (a) y frágil (b)

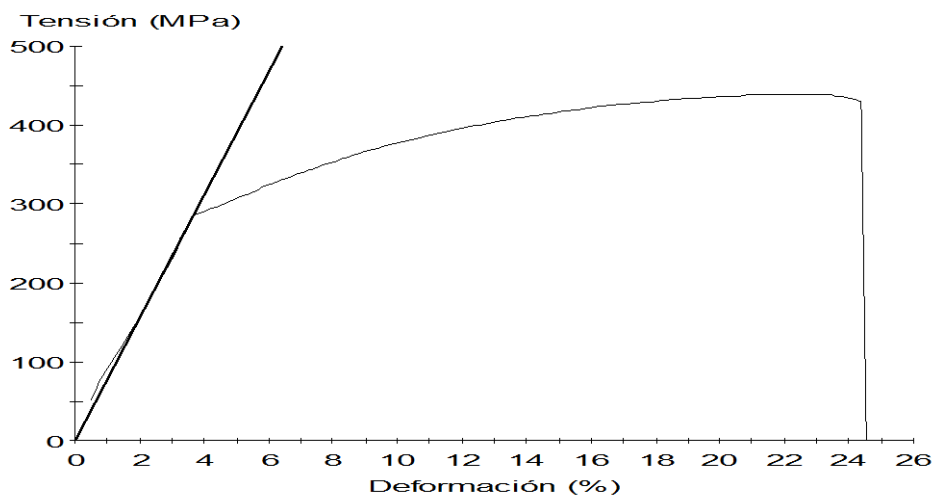


Figura 8.32: Resultados ensayo tracción probeta sin recocer

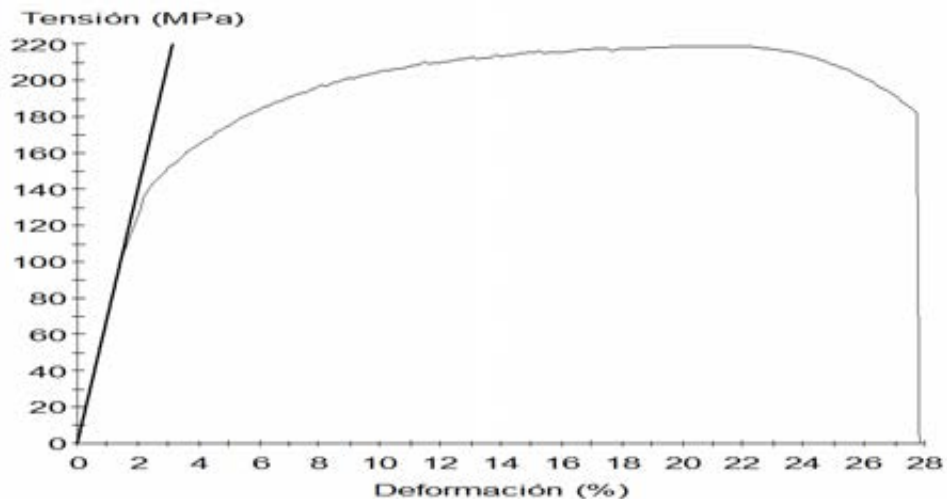


Figura 8.33: Resultados ensayo de tracción probeta recocida

### 8.6 Comparación de los resultados de Ensayos, MEF y TLS

A continuación se describirá la implementación mediante MEF, del ensayo llevado a cabo con el aluminio EN AW-2030 recocido en la máquina de tracción/compresión. Se ha indicado que se disponen de dos programas de elementos finitos: ABAQUS y DEFORM, teniendo para ambos la posibilidad de trabajar tanto en 2D como en 3D.

Como al material hubo que realizarle una serie de ensayos de tracción para obtener de la curva tensión-deformación la  $n$  y  $K$  características del material, es posible implementar las características del material en ambos programas introduciendo los datos de la siguiente tabla en la definición plástica del material (Tabla 8.2).

El primer intento de simular el ensayo se realiza en DEFORM 2D, pero los datos obtenidos no siguen la evolución observada en el ensayo ni tampoco tiene los mismos rangos de valores, como se aprecia en la Figura 8.34.

Se prueba con distintos rozamientos pero los resultados obtenidos son similares a los anteriores. Se interpreta que ellos es debido a que con la simulación DEFORM 2D no se están modelizando las mismas condiciones de contorno del ensayo. Se procede, por tanto, a implementar el ensayo en el módulo 3D que ofrece DEFORM. De esta forma, se diseña una pieza de mismas características que la ensayada y se le aplican las mismas condiciones de contorno. Se observa que la deformación producida al final de la simulación concuerda con la producida en el ensayo real (Figura 8.35).

En la comparación de resultados, éstos ya muestran una evolución similar y se encuentran dentro del mismo rango que los obtenidos en el ensayo, aunque ligeramente por debajo (Figura 8.36).

Tabla 8.2: Datos obtenidos en el ensayo de tracción para el aluminio EN AW-2030 recocido

$\sigma$ [MPa]	$\epsilon$	$\sigma$ [MPa]	$\epsilon$
150,513	0,19	245,2258	11,07
158,6927	0,68	248,7758	12,03
165,6761	1,07	253,5842	13,15
178,8419	2,03	256,2158	14,08
191,5104	3,07	259,5022	15,01
202,213	4,11	263,0275	16,01
210,7017	5,13	266,0195	17,09
219,4105	6,15	266,7756	18,07
226,2302	7,15	264,9188	19,12
231,4172	8,15	259,631	20,01
236,369	9,13	249,2898	21,04
240,7335	10,11	240,7335	10,11

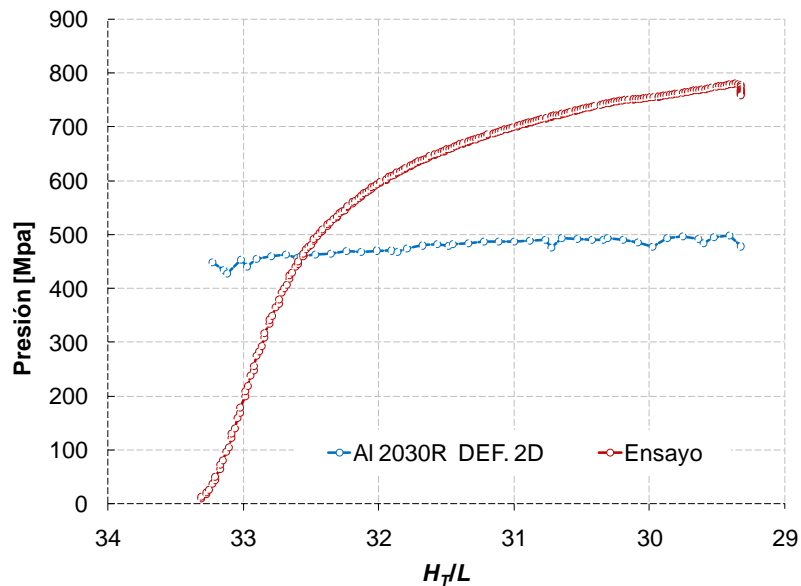


Figura 8.34: Comparación entre ensayo real y DEFORM 2D

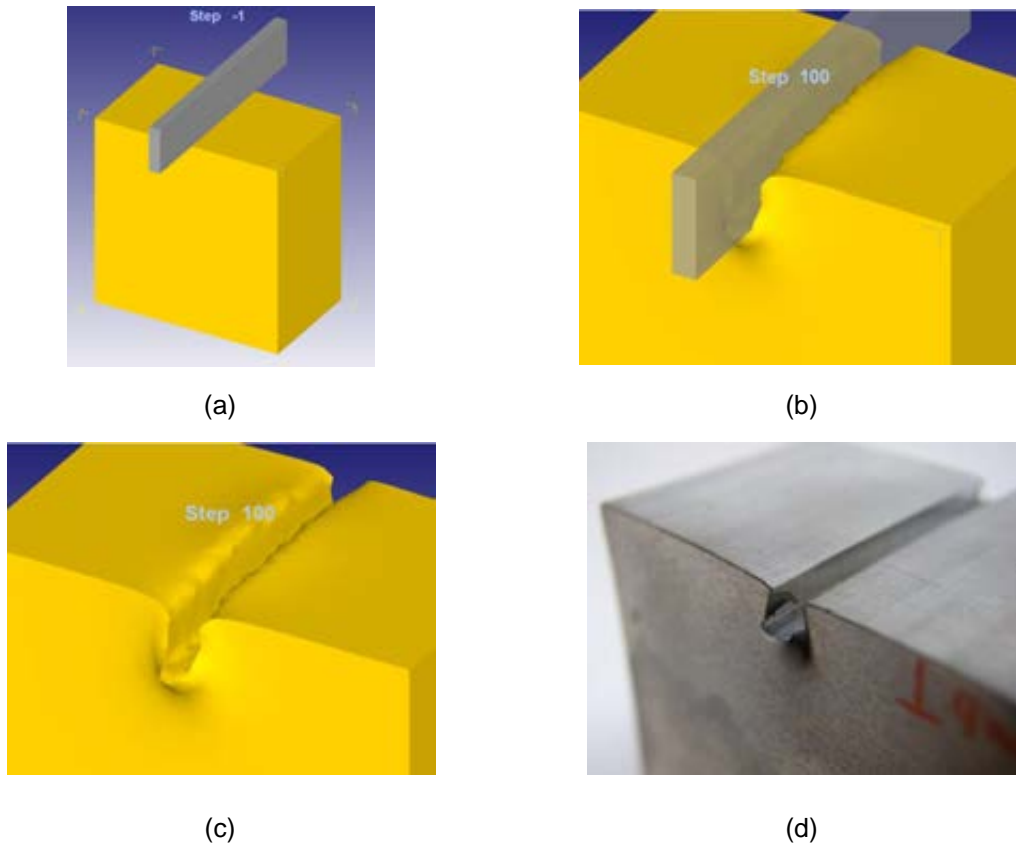


Figura 8.35: Deformación obtenida en el ensayo y en DEFORM 3D. (a) pieza e indentador, (b) Detalle deformación con indentador, (c) Detalle deformación sin indentador y (d) Pieza real después del ensayo.

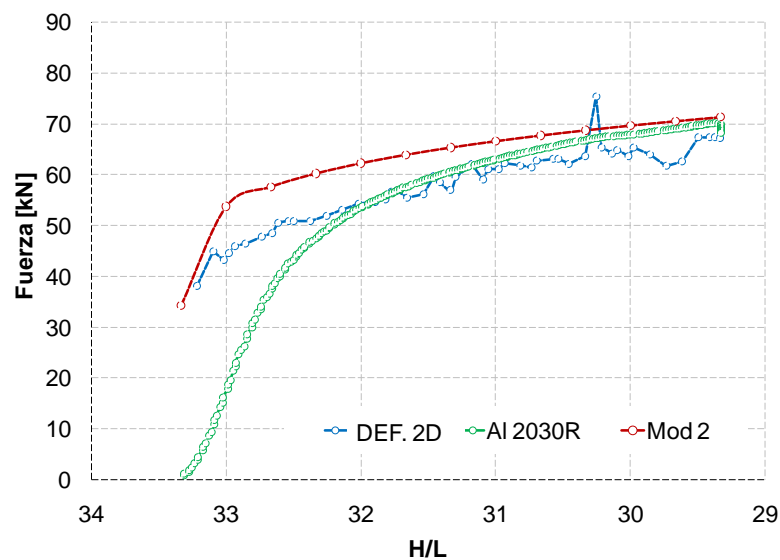


Figura 8.36: Comparación resultados DEFORM 3D, ensayo y modelo TLS

Se lleva a cabo un estudio de rozamiento dentro del DEFORM 3D para verificar que esa diferencia existente en los resultados no se debe a una consideración inferior de éste, pero se llega a la misma conclusión obtenida con anterioridad: el rozamiento

parece diluirse en el esfuerzo, siendo despreciable en comparación con el esfuerzo total, como se aprecia en la Figura 8.37

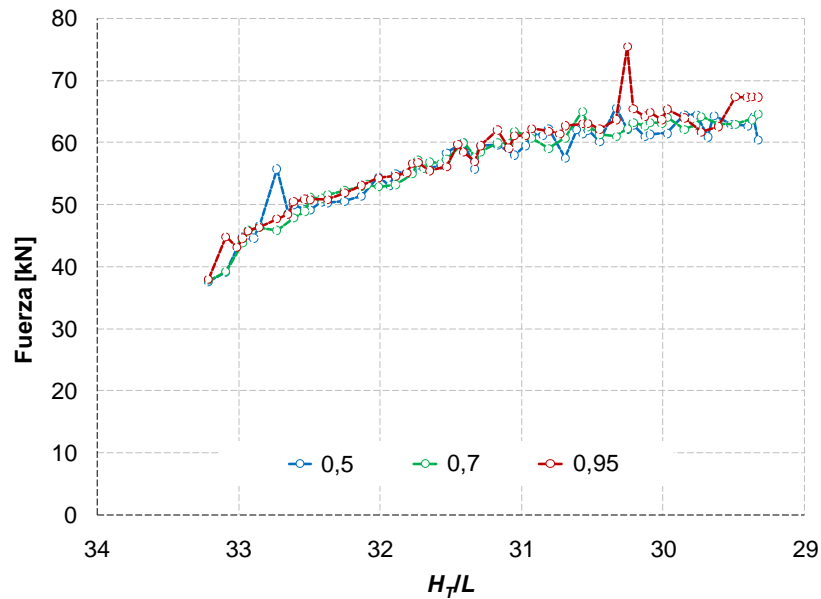


Figura 8.37: Comparación de resultados con distintos valores de  $m$

Se tiene en cuenta la posibilidad de que esa variación existente en los resultados pueda deberse, entre otros factores, a la deformación que sufre el indentador en el ensayo real (Figura 8.38), por lo que se decide realizar la simulación aportando el material del indentador (Acero 304) y permitiendo la deformación de éste.

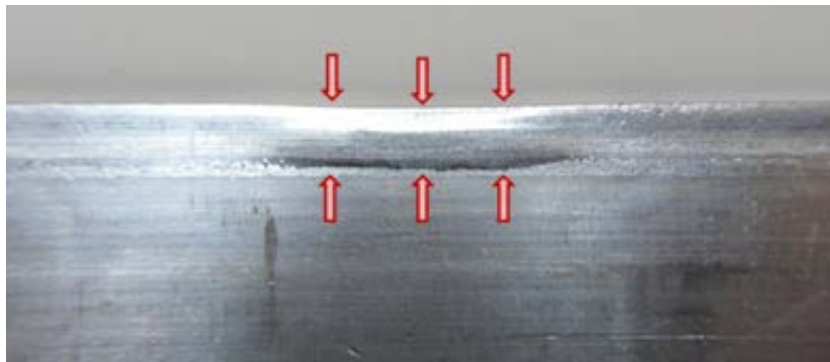


Figura 8.38: Deformación sufrida por el indentador en la realización del ensayo de indentación

Por tanto, se trabajará con un indentador que, a su vez, se deformará plásticamente, ya que en las simulaciones anteriores el indentador siempre había sido rígido-perfecto. Esto supone una mayor complejidad en la resolución de la indentación, lo que incrementará la posibilidad de problemas y el tiempo de la simulación de forma considerable. Durante el desarrollo de la implementación se dieron varios problemas como, por ejemplo, la imposibilidad de llevar a cabo el movimiento vertical del punzón ya que éste, una vez terminado todo el proceso de simulación, seguía estando en su posición inicial y no se había conseguido ninguna deformación en la pieza de trabajo., aun habiéndose verificado previamente que el movimiento asignado era el adecuado y el punzón realizaba el movimiento deseado.

Es necesario, por tanto, incorporar un elemento rígido en la parte superior que será el que empuje el punzón sobre la pieza a deformar. Se seguirá el mismo patrón que en el ensayo y este nuevo elemento podrá asimilarse a la herramienta utilizada para que el punzón no resbale durante los ensayos a velocidades más altas.

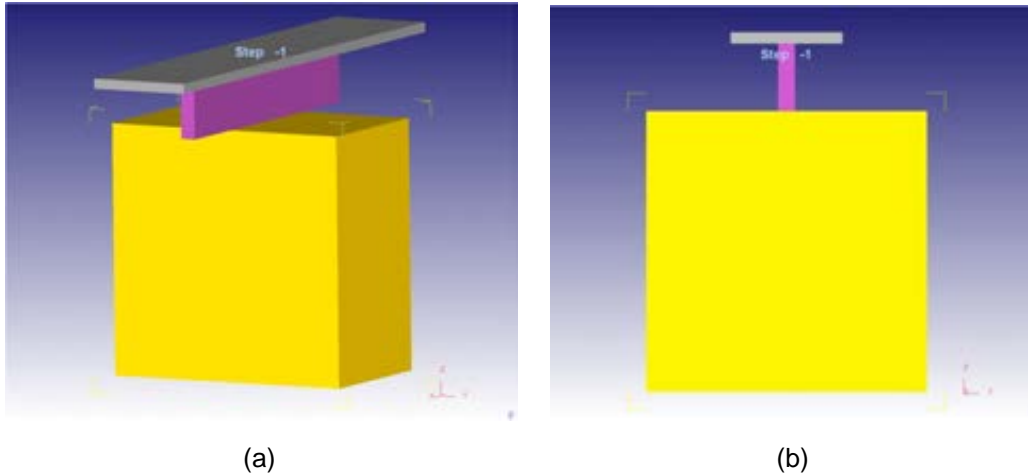


Figura 8.39: Incorporación de elemento auxiliar de empuje. (a) perfil y (b) frontal

De esta forma, el programa funciona correctamente y realiza la penetración del punzón en la pieza de forma adecuada. No obstante, una vez terminada la simulación se aprecia que el punzón se deforma mucho más que en la realidad. En la Figura 8.40 se omitirá la pieza superior para apreciar bien este hecho.

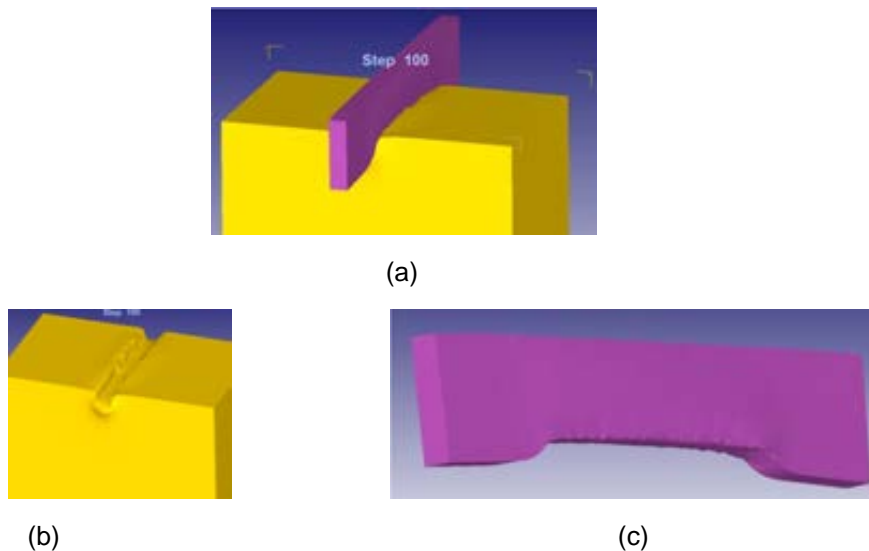


Figura 8.40: Detalle de la deformación del punzón. (a) pieza con punzón, (b) deformación en pieza y (c) deformación en punzón

Además, los resultados obtenidos presentan demasiadas perturbaciones, demasiados picos y caídas, por lo que se ha especificado la ley de remallado a cada 3 steps (Figura 8.41).

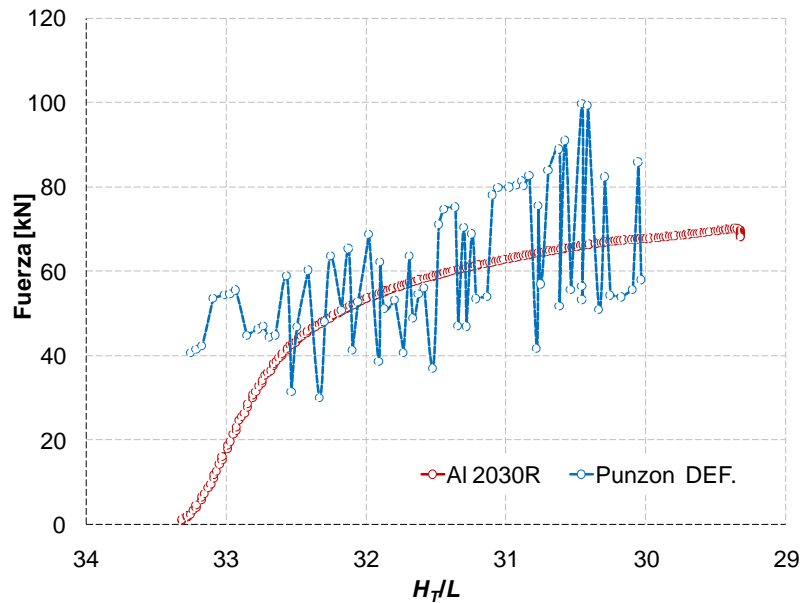


Figura 8.41: Perturbaciones en las simulaciones con DEFORM 3D

Una vez implementados los nuevos parámetros, la deformación que se produce esta vez en el punzón parece menor, si bien éste se ha inclinado durante la indentación, por lo que la indentación no se ha producido correctamente.

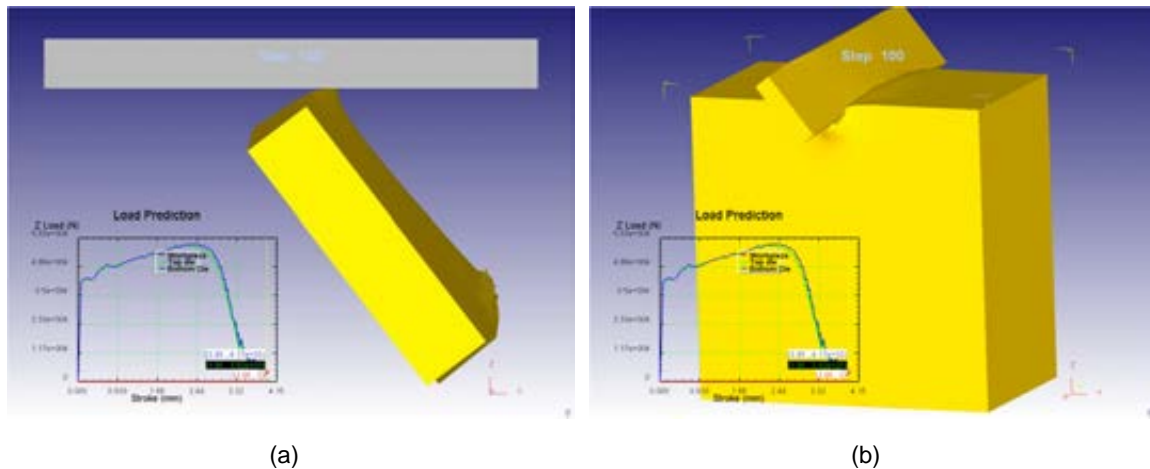


Figura 8.42: Deformación con punzón deformable. (a) solo punzón, (b) punzón y pieza

No obstante, resulta interesante que ocurra esto ya que en el ensayo real, para una velocidad de este valor (1 mm/s), el punzón tenía el mismo comportamiento al no estar sujeto. Es por ello que se crea un útil de sujeción para el mismo.

No obstante, se recuperan los resultados obtenidos y se comparan con el ensayo hasta el momento en que comienza a producirse la inclinación del punzón (Figura 8.43). Apreciándose que, antes de producirse el fallo, los resultados son similares a la consideración de punzón rígido.



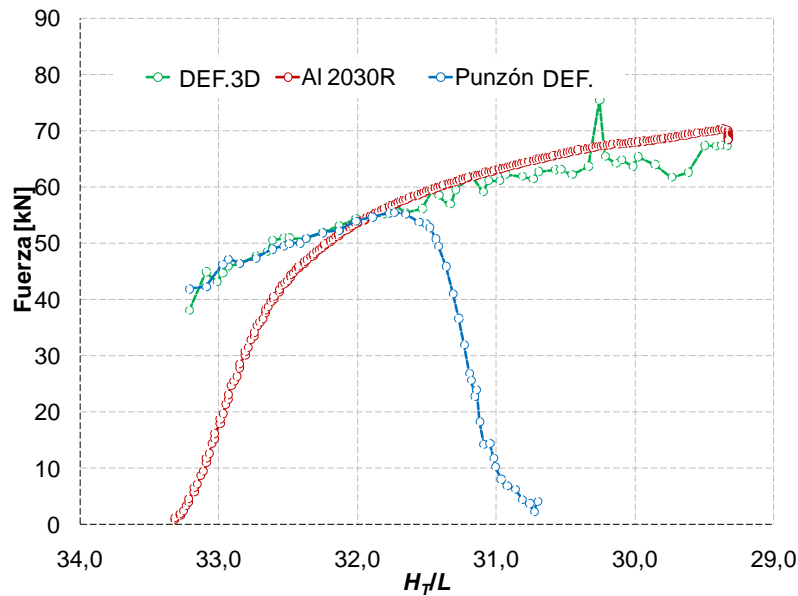


Figura 8.43: Comparación con punzón deformable

Las siguientes simulaciones se llevan a cabo restringiendo el movimiento del punzón para evitar esa inclinación durante el proceso. En la Figura 8.44 se aprecian los resultados obtenidos de las siguientes simulaciones. En ningún momento se alcanzan los mismos valores que los obtenidos del ensayo, quedando siempre ligeramente por debajo de éstos, lo que hace suponer que esa leve diferencia pueda deberse a ligeras variaciones y factores no controlables en el momento de la realización del ensayo.

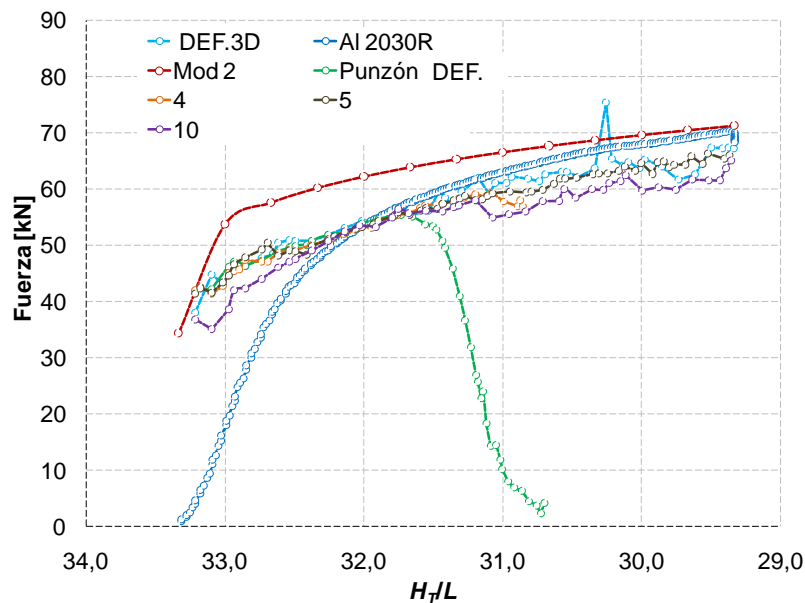


Figura 8.44: Comparación de los resultados de DEFORM con los del ensayo real

A continuación se procede a explicar el mismo proceso, pero esta vez con ABAQUS, con el fin de presentar las diferencias entre ambos programas y buscar

unos resultados óptimos para todo el proceso, verificando así la idoneidad de uno u otro.

Igualmente, al intentar implementar el ensayo en 2D, con consideración de Deformación Plana, los resultados no siguen la misma evolución ni rango de valores (Figura 8.45), por lo que se realiza también en 3D.

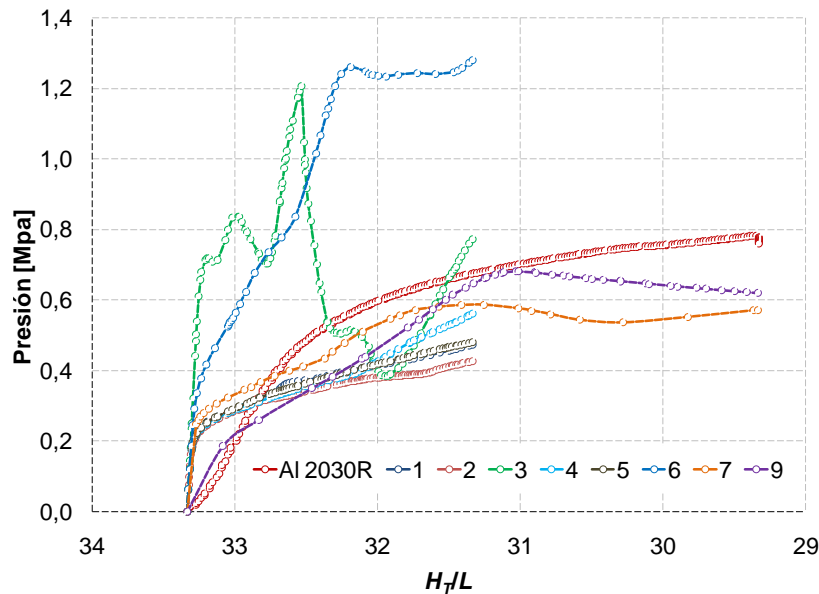


Figura 8.45: Comparación de resultados del ensayo con resultados de ABAQUS 2D

Para evitar complicar la simulación, se comenzará planteando el ensayo de la forma más simple posible, evitando en un primer momento plantear un contacto. Este procedimiento es debido a la complejidad que aporta ABAQUS en comparación con el anterior utilizado. ABAQUS resulta una herramienta mucho más potente y su uso es de índole más variada y general, lo que conlleva definir cada paso de forma mucho más laboriosa. DEFORM, por el contrario, está definido para problemas de deformación plástica, por lo que su aplicación es más sencilla.

En un primer lugar se trabajará y se definirán las condiciones de contorno. Así, impidiendo el movimiento de los nodos que estarían en contacto con el punzón, se asimilaría a una situación de rozamiento máximo o  $m=1$ , mientras que dejando los nodos con libertad de movimiento se plantearía la ausencia de rozamiento. Para simular el punzón, se aplica un movimiento de 6 mm hacia abajo en la zona que cubriría este. Por último, se trabaja con condiciones de simetrías (Figura 8.46).

Los primeros resultados arrojan una deformación similar a la obtenida con el ensayo real, como se aprecia en la Figura 8.47, mientras que los esfuerzos obtenidos se encuentran dentro del mismo rango y con una evolución similar (Figura 8.48), aunque ligeramente inferiores, al igual que ocurría con DEFORM.

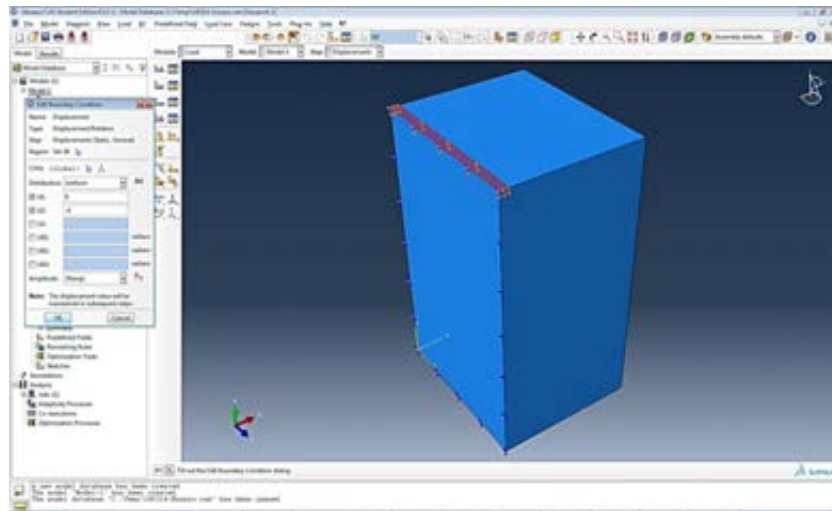


Figura 8.46: Planteamiento de la pieza de trabajo en ABAQUS

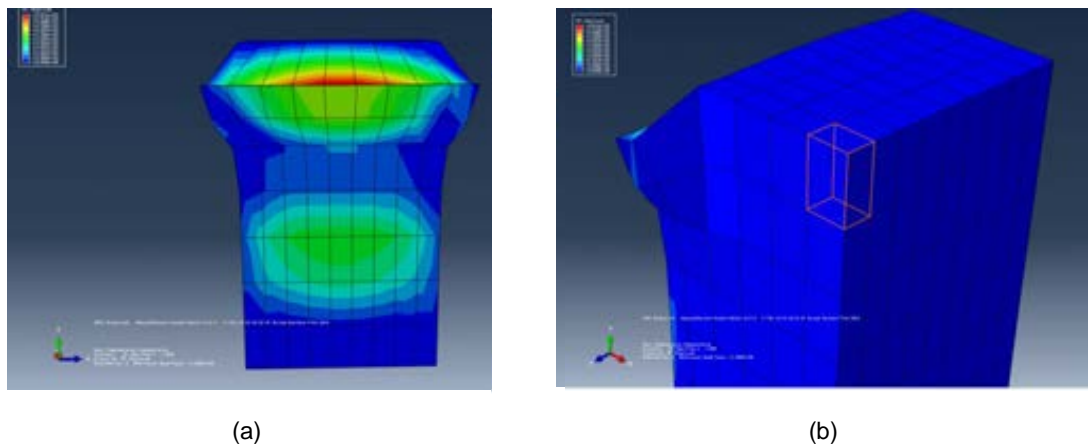


Figura 8.47: Deformación obtenida con ABAQUS. (a) corte de simetría, (b) perspectiva de la deformación

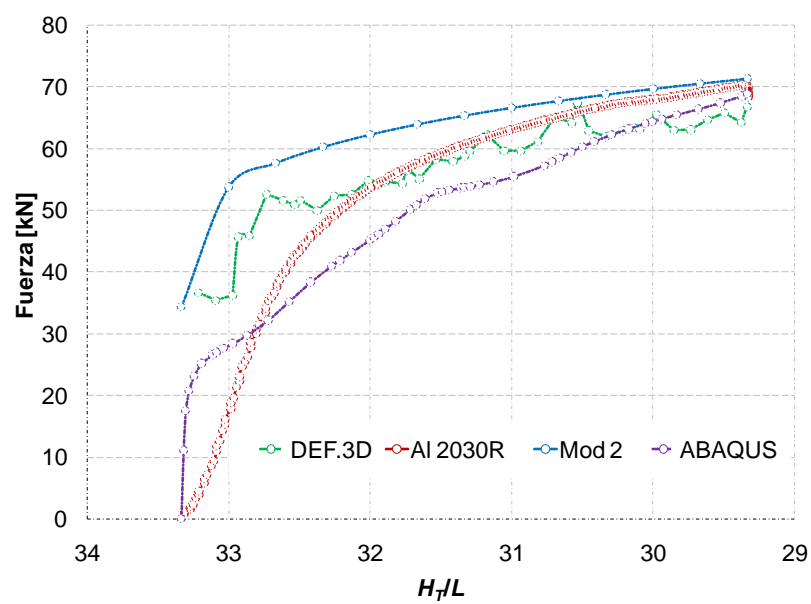


Figura 8.48: Comparación resultados ensayo, ABAQUS, DEFORM y modelo TLS

Se llevan a cabo diversas simulaciones, cambiando distintas características de las mismas, siendo los resultados obtenidos del orden de los mostrados con anterioridad (Figura 8.49), por lo que se entiende la necesidad de plantear la simulación como un problema de contacto, añadiendo el punzón a la misma.

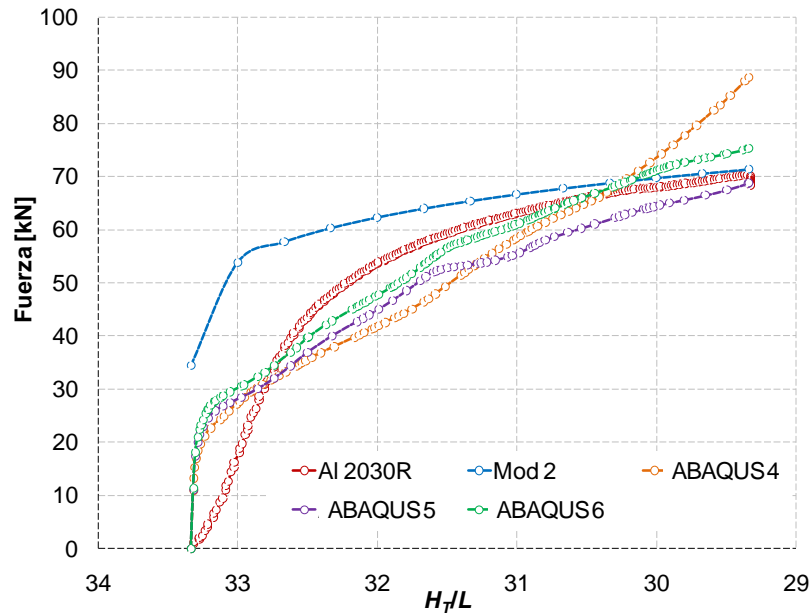
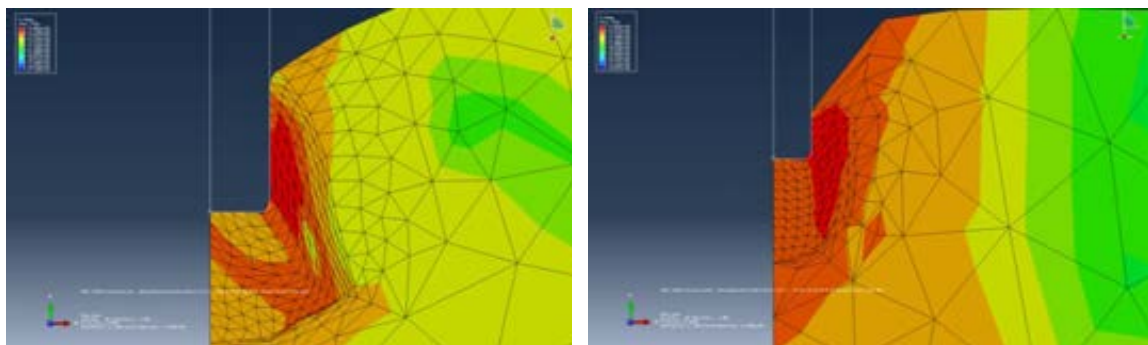


Figura 8.49: Comparativa con ABAQUS 3D

Para el planteamiento de la simulación introduciendo el contacto con el punzón también será necesario indicar las secciones de contacto, el tipo de rozamiento y el valor de este, así como una serie de simulaciones previas para conocer el comportamiento del material según los parámetros escogidos. En la Figura 8.50 se aprecia el planteamiento del mismo problema bajo la perspectiva de distintas mallas



(a)

(b)

Figura 8.50: Resolución de la simulación con contacto en ABAQUS. (a) malla fina, (b) malla gruesa

Se debe definir el punzón como rígido analítico para que haga las funciones de una superficie definida matemáticamente, utilizando para ello líneas y arcos. En caso de utilizar un rígido discreto sería necesario mallar también el punzón utilizando elementos rígidos.

En la Figura 8.51 y en la Figura 8.52 se pueden apreciar los distintos resultados obtenidos de las diferentes simulaciones implementadas, en comparación con los resultados obtenidos del ensayo real de indentación. Así, se aprecia que para la simulación 2 y 3, debido a problemas relativos al grosor de la malla, no es posible realizar una penetración grande y el programa se detiene mucho antes. Es necesario, por tanto, afinar la malla y cambiar el tipo de elemento que la compone, con el fin de asociar a la malla el elemento que trabaje bien para grandes deformaciones.

Las simulaciones 7, 8 y 9 presentan una buena evolución hasta alcanzar un factor de forma de 31. En ese momento se puede ver como los resultados comienzan a ser superiores a los arrojados por el ensayo real de indentación. Esto se debe a la distorsión de la malla. Es necesario implementar un remallado de la misma pero, debido a los elementos utilizados y al tiempo de trabajo disponible con el programa, finalmente esto no resulta posible.

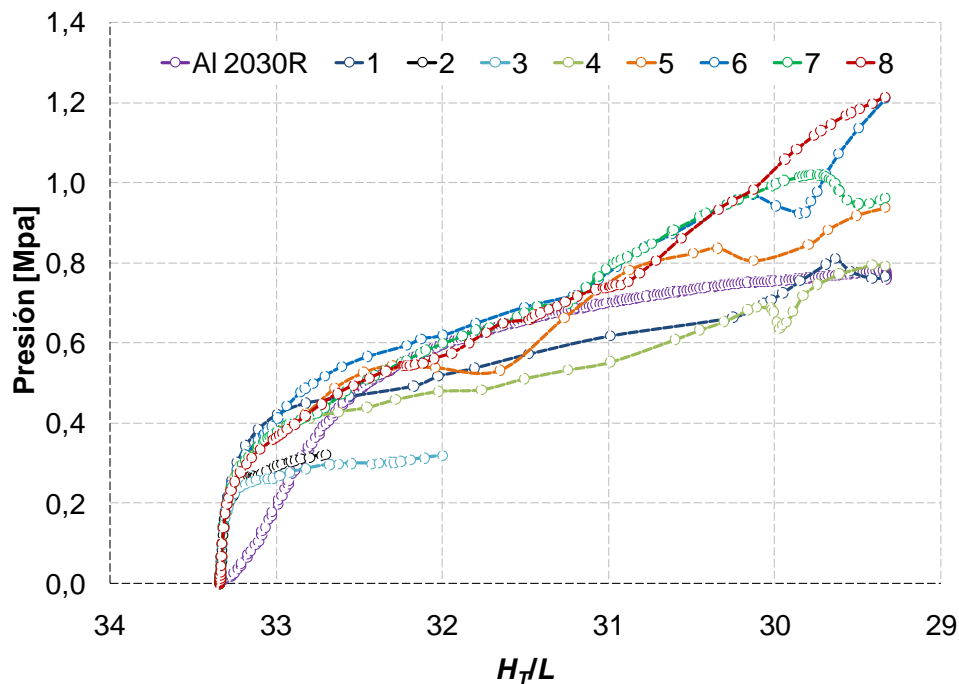


Figura 8.51: Resultados para las simulaciones de la 1 a la 8

Por tanto, en caso de seleccionar uno de los dos programas de elementos finitos para realizar distintas simulaciones y llevar a cabo una comparativa adecuada con los resultados, sería más conveniente el uso del programa DEFORM en su vertiente 2D, ya que este programa es específico para problemas de conformado por deformación, dejando al usuario un entorno mucho más sencillo y una aplicación más directa y rápida, no siendo necesario definir cada uno de los pasos a realizar. Además, los resultados arrojados por DEFORM suelen presentar una repetitividad que no se ha conseguido con ABAQUS, por lo que la fiabilidad del primero es mayor, no existe esa variación tan amplia de resultados con la mínima variación de las características de la simulación. Por otra parte, se elige su versión en 2D ya que el tiempo computacional

es mucho menor que en su versión en 3D y, como ya se ha mostrado, los resultados obtenidos no presentan una apreciable variación.

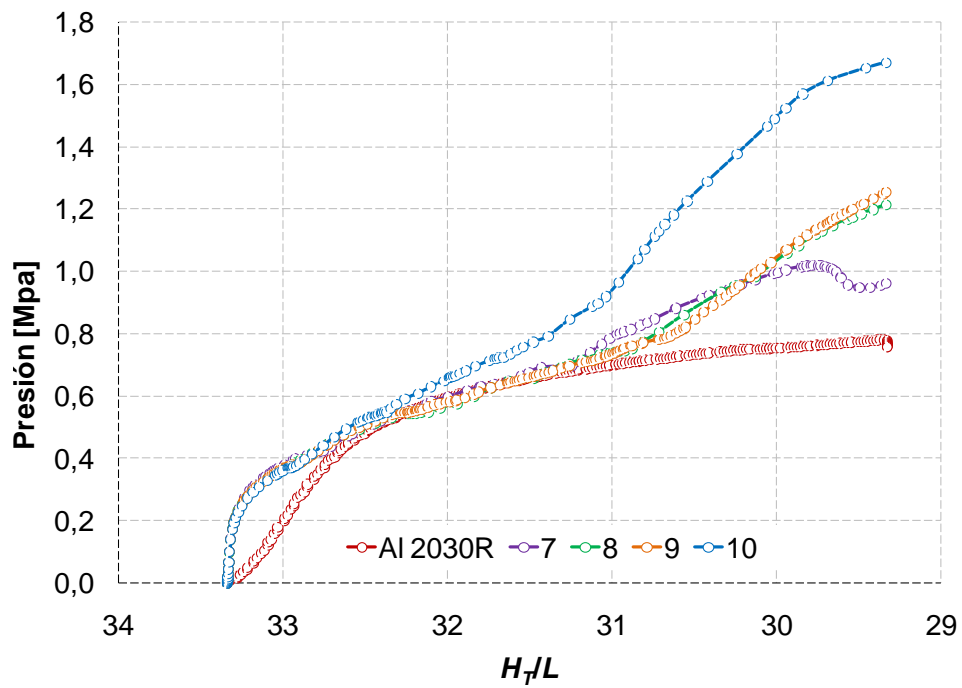


Figura 8.52: Resultados para las simulaciones de la 7 a la 10

## Referencias

- [1] AENOR, "Materiales metálicos. Verificación de máquinas de ensayos uniaxiales estáticos. ," in *Parte 1: Máquinas de ensayo de tracción/compresión. Verificación y calibración del sistema de medida de fuerza. (ISO 7500-1: 2004)*, ed. Madrid: AENOR, 2006.
- [2] A. I. H. Committee, *Properties and Selection: Nonferrous Alloys and Special-Purpose Materials* vol. 2: ASM International, 1990.
- [3] M. Yetna N'Jock, D. Chicot, X. Decoopman, J. Lesage, J. M. Ndjaka, and A. Pertuz, "Mechanical tensile properties by spherical macroindentation using an indentation strain-hardening exponent," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 75, pp. 257-264, 2013.
- [4] G. W. Rowe, *Conformado de los metales*. Bilbao (España): Urmo, 1972.
- [5] M. P. Groover, C. M. de la Peña Gómez, and M. Á. M. Sarmiento, *Fundamentos de manufactura moderna: materiales, procesos y sistemas*: Pearson Educación, 1997.
- [6] A. Alforzan and J. S. Gunasekera, "An upper bound elemental technique approach to the process design of axisymmetric forging by forward and backward simulation," *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 142, pp. 619-627, 2003.





# CAPÍTULO 9

---

## APLICACIONES

*Análisis, Desarrollo y Validación del Método del Límite Superior en Procesos de Conformado por Indentación*

---



**Indice Capitulo 9**

9.1	Aplicación 1 .....	9.1
9.2	Aplicación 2 .....	9.3
9.3	Aplicación 3 .....	9.4



## 9. APLICACIONES

### 9.1 Introducción

Una vez planteado el método de resolución de un caso de indentación mediante la aplicación del TLS, y contrastados los resultados tanto con métodos analíticos, como el CLD, métodos numéricos, como el MEF y ensayos experimentales, es preciso enmarcar el proceso de indentación en la industria actual, con el fin de explicar su aplicación y resaltar la importancia del estudio llevado a cabo sobre el mismo. Con este objetivo se van a contemplar tres aplicaciones diferentes.

### 9.2 Aplicación 1

El proceso de indentación ha sido considerado, hasta hace relativamente poco tiempo, como una aplicación específica de otros procesos de deformación plástica más generales como puede ser la forja. Por tanto, se ha planteado como un proceso secundario. En la actualidad, gracias a los avances tecnológicos y económicos, este proceso empieza a tomar utilidad como uno de los procedimientos de interés principal en relación a los procesos de deformación plástica [1, 2]. Es por ello que la industria actual se encuentra en fase de demanda de nuevos estudios, entre ellos los relativos a los procesos de indentación, para una aplicación más adecuada de los mismos, a través de sus distintas aplicaciones y condiciones.

En el proceso de indentación, la matriz o punzón produce una impresión en el material, causando de esta forma una deformación plástica permanente. Repitiendo esta acción consecutivamente es posible alcanzar formas complejas de la pieza terminada. Un ejemplo de la aplicación del proceso de indentación, como sucesión del mismo, puede encontrarse en el *Proceso de Forja Incremental Localizada* (PFIL) [3] o en el *Proceso de Indentación Múltiple* (PIM) [4] (Figura 9.1), que derivan, a su vez, de los *Procesos de Forja Incremental* (PFI) [5]. Este tipo de procesos requiere menos esfuerzo para lograr la forma requerida y las matrices, en general, poseen geometrías más sencillas. Adicionalmente, otra de las ventajas que pueden destacarse de este

tipo de procesos es que puede implementarse en Centros de Mecanizado de Control Numérico (CNC), lo que les confiere una gran flexibilidad.

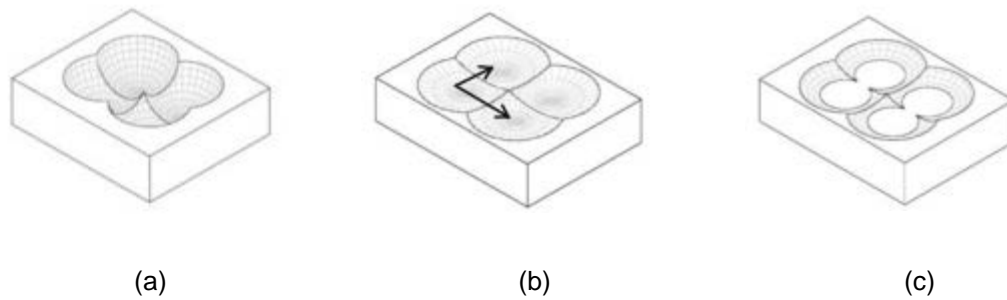


Figura 9.1: Proceso de Indentación Múltiple: (a) punzón hemisférico, (b) punzón esférico y (c) punzón plano con chaflán [6]

Son diversos los autores que han estudiado las diferentes aplicaciones de los PFI, como Grosman [1], con estudios dedicados a la formación de anillos de forja mediante un proceso de indentaciones consecutivas, aplicando esfuerzos a través de matrices esbeltas y llegando a desarrollar dos patentes de aplicación. También son destacables los trabajos de Bouffieux [2] y de Camacho [3], que presentan diferentes estudios sobre el Proceso de Forja Incremental Puntual (PFIP), también conocido como Proceso de Forja Incremental Localizada (PFIL), en sus diferentes variantes.

Los PFI son una alternativa reciente a los procesos tradicionales de deformación plástica. Este tipo de procesos aparece con el objetivo de abarcar los profundos cambios que están teniendo lugar en la industria actual, aunque su aplicación continúa siendo muy restringida

Es por esta razón por lo que la demanda para la implementación y simulación, mediante Métodos Numéricos, de los procesos de deformación incremental es alta. No obstante, el tiempo computacional para lograr este tipo de simulaciones con los programas actuales que aplican el MEF sigue siendo elevado y, por tanto, la aplicación es menor [7]. Es por ello que se ha visto la conveniencia de proceder al estudio, desarrollo y aplicación del TLS mediante su configuración modular de BRT, que se presenta en muchos casos como una alternativa capaz frente a los desarrollos establecidos con los métodos computacionales actuales.

De entre las particularidades que caracterizan a este tipo de procesos, las principales y más atractivas serían: la gran versatilidad que presenta la maquinaria utilizada, puesto que permite su adaptación a una gran variedad de procesos; el bajo coste de producción, uno de los objetivos más buscados en la industria actual; la gran calidad de los acabados, lo que lo hace un proceso apropiado para aplicaciones de alta precisión, como las que se requieren en las industrias automovilística o aeroespacial; los reducidos esfuerzos de deformación y la posibilidad de incluir para su deformación una amplia variedad de materiales, incluso aleaciones de titanio o superaleaciones, que suelen ser más complicadas de conformar mediante otros procesos de fabricación tales como el mecanizado [4]

En la bibliografía adjunta se aprecia que el estudio y análisis de los PFI, dentro de los cuales se incluyen los procesos de indentación, ha sido recurrente en este último periodo [8, 9], por lo que se vuelve imperativo implementar este tipo de procesos en la industria actual para alcanzar una producción más competitiva.

Realizando un acercamiento singular de los PFI, identificando el proceso como una sucesión de indentaciones localizadas, el caso de estudio se puede llegar a simplificar hasta analizar únicamente un único proceso de indentación en cada fase. Es por ello que una de las aplicaciones principales del método, desarrollada en la presente tesis, consiste en la implementación del modelo en los distintos casos de Forja Incremental, analizados desde el punto de vista de una indentación simple, con el fin de conocer el esfuerzo que será necesario aplicar para llevar a cabo la deformación requerida sobre la pieza estudiada.

### 9.3 Aplicación 2

Al considerarse el proceso de indentación como una aplicación particular de los procesos de forja, y teniendo en cuenta que en la indentación la matriz que produce la deformación inferior a las dimensiones del material que va a deformar, resulta posible presentar el modelo como continuación de los estudios de F. Martín [10, 11], atribuyéndose al análisis de los momentos previos de deformación con matrices complejas, antes de que la matriz, al completo, haya alcanzado su interacción con el material de la pieza a deformar (Figura 9.2). Es decir, suponiendo una matriz con placas paralelas no planas, con alguna geometría específica, entrarán en contacto con el material a deformar ciertas partes de la matriz, antes de llevar a cabo el llenado completo de la forma. Son esos momentos previos al contacto completo de la matriz los que pueden considerarse como casos aislados de indentación.

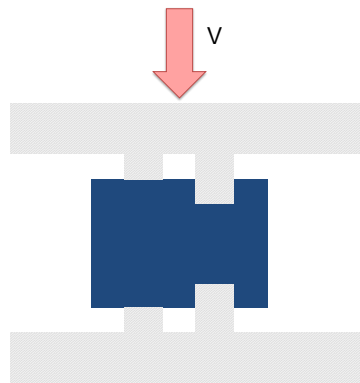


Figura 9.2: Forja con matriz compleja

Asimismo, existe la posibilidad de asimilar el proceso de indentación al momento en el que el material desborda las matrices en el proceso de forja, creando lo que se conoce como rebaba, estudiando el momento desde que se produce esa rebaba, igualándolo a un proceso de indentación con punzón plano, hasta que se alcanza la deformación requerida (Figura 9.3).

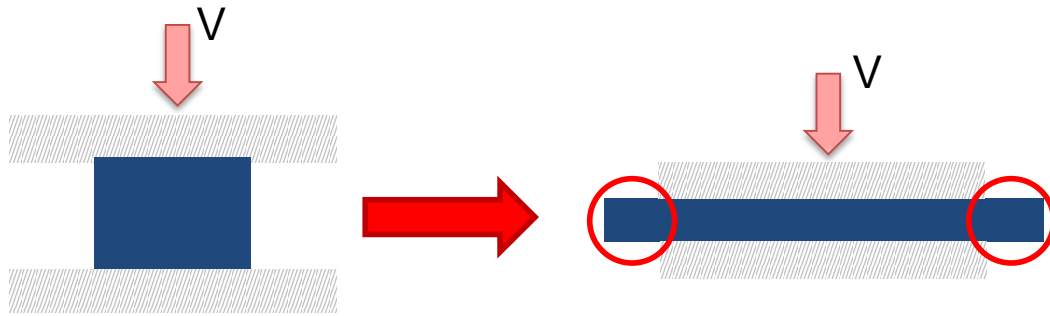


Figura 9.3: Proceso de Forja con creación de rebaba

#### 9.4 Aplicación 3

Gracias a la sencilla aplicación del modelo, una vez éste es desarrollado, y a la velocidad computacional del mismo en comparación con los métodos actuales de análisis basados en el MEF, es posible diseñar una aplicación en la que el usuario sólo deba introducir los parámetros conocidos en el proceso de deformación requerido, como puede ser la geometría de la matriz, el tamaño de ésta o el material de la pieza, obteniendo con ellos el esfuerzo necesario para alcanzar la deformación deseada en cuestión de segundos de cálculo.

#### 9.5 Conclusiones

Por lo tanto, teniendo en cuenta lo anteriormente enunciado, las aplicaciones directas derivadas del empleo del TLS mediante BRT en procesos de forja, empleando el modelo modular, podrían resumirse en los siguientes puntos:

- Cálculo de esfuerzos para los nuevos proceso de fabricación: PFI
- Cálculo de esfuerzos para matrices de forja de geometrías complejas.
- Cálculo de esfuerzos para procesos de forja con rebaba.

Adicionalmente, el método desarrollado podría ser implementado en un programa de cálculo que permita al operario o investigador deducir el esfuerzo de deformación requerido mediante la introducción de los datos conocidos, por lo que se considera de interés la generación de la siguiente acción:

- Diseño de aplicación informática para el cálculo de esfuerzos de un proceso de indentación mediante el TLS



## Referencias

- [1] P. Groche, D. Fritsche, E. A. Tekkaya, J. M. Allwood, G. Hirt, and R. Neugebauer, "Incremental Bulk Metal Forming," *CIRP Annals - Manufacturing Technology*, vol. 56, pp. 635-656, 2007.
- [2] N. Venkata Reddy, R. Sethuraman, and G. K. Lal, "Upper-bound and finite-element analysis of axisymmetric hot extrusion," *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 57, pp. 14-22, 1996.
- [3] A. M. Camacho, M. M. Marín, E. M. Rubio, and M. A. Sebastian, "Application of different simulation strategies for the analysis of Multi-Stroke Localised-Incremental Forming operations," *Advances in Non Conventional Materials Processing Technologies. Materials Science Forum*, vol. 713, pp. 19-24, 2012.
- [4] E. Ghassemali, M.-J. Tan, A. E. W. Jarfors, and S. C. V. Lim, "Optimization of axisymmetric open-die micro-forging/extrusion processes: An upper bound approach," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 71, pp. 58-67, 2013.
- [5] J. Nowak, L. Madej, F. Grosman, and M. Pietrzyk, "Material flow analysis in the Incremental Forging technology," *International Journal of Material Forming*, vol. 3, pp. 931-934, 2010/04/01 2010.
- [6] C. Bernal, A. M. Camacho, M. Marín, and B. de Agustina, "Methodology for the evaluation of 3D surface topography in Multiple Indentation Processes," *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, vol. 69, pp. 2091-2098, 2013.
- [7] S. Seiong, O. Younossi, and B. W. Goldsmith, *Titanium. Industrial Base, Price Trends and Technology Initiatives*, 2009.
- [8] A. Alfozan and J. S. Gunasekera, "Design of profile Ring Rollin by Backward Simulation using Upper Bound Element Technique (UBET)," *Journal of Manufacturing Processes*, vol. 4, pp. 97-108, 2002.
- [9] I. Bagudanch, M. L. Garcia-Romeu, I. Ferrer, and J. Lupiañez, "The effect of process parameters on the energy consumption in Single Point Incremental Forming," *Procedia Engineering*, vol. 63, pp. 346-353, 2013.
- [10] D. Y. Yang and T. S. Noh, "An analysis of axisymmetric hydrostatic bulging by the upper-bound method," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 30, pp. 43-49, 1988.
- [11] F. Martín, "Desarrollo, integración y optimización en el estudio del proceso de forja mediante el teorema del límite superior a través del modelo de bloques rígidos triangulares," Thesis, Ingeniería de Fabricación, Universidad de Málaga, Málaga, 2009.



# CAPÍTULO 10

---

## CONCLUSIONES

*Análisis, Desarrollo y Validación del Método del Límite Superior en Procesos de Conformado por Indentación*

---



## Índice Capítulo 10

10.1	Introducción .....	C10.1
10.2	Conclusiones generales.....	C10.1
10.3	Conclusiones particulares.....	C10.2
10.4	Líneas futuras de desarrollo .....	C10.3



## 10.CONCLUSIONES

### 10.1 Introducción

En el presente capítulo se realizará un resumen de las aportaciones acometidas en cada uno de los capítulos anteriores, realizando la pertinente comparativa con los objetivos de la tesis, que se establecieron al inicio de la misma, con el fin de identificar el grado de consecución de dichos objetivos.

A continuación se presentan las conclusiones generales, analizando a grandes rasgos los objetivos básicos alcanzados, siendo éstos el núcleo principal del estudio realizado. Posteriormente se comentarán las conclusiones particulares, mostrando aquellos resultados y análisis desarrollados adicionalmente en el transcurso de su elaboración, de forma análoga a lo expresado para los objetivos generales. Finalmente, se señalarán las líneas de desarrollo futuro de la presente Tesis, basadas en las necesidades de extender los resultados obtenidos, sugiriendo las propuestas adecuadas para una correcta continuación del estudio, nuevas posibilidades y la apropiada aplicación del método desarrollado. Con esta proyección futura se pretende dejar abierto el camino para abarcar aquellos frentes que puedan quedar abiertos o sean interesantes de continuar.

### 10.2 Conclusiones generales

Se presenta la consecución de los objetivos principales expuestos en el inicio de la presente Tesis, mediante el planteamiento inicial y justificación de la misma. El desarrollo de la investigación permite obtener las siguientes conclusiones generales:

- Se ha constatado la idoneidad de llevar a cabo estudios exhaustivos sobre los procesos de indentación, a causa de la nueva demanda de la industria actual, que es debida al desarrollo de los nuevos procesos de fabricación basados en la forja incremental.
- Se ha constatado, así mismo, la gran aceptación que posee el Teorema del Límite superior en los diversos trabajos y estudios consultados. No obstante, no existe un gran número de estos estudios basados en la aplicación de este

teorema bajo la configuración modular abarcada en la presente Tesis Doctoral, siendo una línea de investigación interesante y novedosa, debido a su simplicidad de aplicación, una vez desarrollado el modelo.

- Se ha conseguido implantar un método analítico para geometrías no restringidas a punzones planos-paralelos que, además, posibilita la incorporación de los distintos parámetros que puedan tener cabida en los procesos de conformado por deformación plástica, como puede ser el endurecimiento por deformación o el rozamiento.
- Asimismo, se ha realizado la clasificación para piezas consideradas finitas e infinitas, identificando el factor de forma referente a cada una de ellas y el modelo de aplicación adecuado para cada configuración.
- Del mismo modo, se ha elaborado un estudio del rozamiento asociado a los procesos de conformado por deformación plástica, estableciendo que, para los casos de indentación, debido al tamaño relativamente pequeño de la matriz de conformado respecto a la pieza, el rozamiento se ve diluido en el esfuerzo de deformación, siendo su influencia mínima.
- Se ha comparado el modelo desarrollado con distintos métodos, tanto analíticos como numéricos, como son el Campo de Líneas de Deslizamiento y el Método de Elementos Finitos, mostrando de esta forma la idoneidad del Teorema del Límite Superior bajo su configuración modular para su aplicación en procesos de conformado por indentación.

### 10.3 Conclusiones particulares

Así como en las conclusiones generales planteadas en el apartado anterior, es posible exponer conclusiones más específicas derivadas del desarrollo de la investigación. Estas son las siguientes:

- Se ha buscado un método que simplifique el estudio de esfuerzos frente a los actuales métodos existentes. Desde la perspectiva matemática, la aplicación del Teorema del Límite Superior bajo su configuración modular conlleva una implementación menos complicada que otros métodos, entre los que se encuentran los métodos que han sido seleccionados para realizar el estudio comparativo.
- Del mismo modo, cabe destacar la rapidez en la aplicación de esta técnica. Su menor coste computacional la hace un método adecuado para la consecución del estudio de los esfuerzos necesarios para realizar la deformación deseada.
- La clasificación de las piezas en dos grupos o configuraciones, finitas e infinitas, ha permitido una solución más amplia ya que abarca todo el rango de piezas posibles para el conformado por deformación plástica.



- De estas dos configuraciones, la denominada como infinita es considerada la de aplicación general, ya que cubre el rango de piezas normalmente empleado en la industria, en procesos de conformado por indentación. El rango de piezas finitas se asemeja al trabajo realizado en procesos de conformado de chapa, lo que aumentaría el tamaño del campo de aplicación del método desarrollado.
- Es posible la adaptación del modelo a distintas geometrías de la matriz de deformación o punzón, gracias a la versatilidad de la configuración modular expuesta y a los modelos desarrollados, tanto para punzones planos como inclinados, existiendo la posibilidad de realizar una combinación de ambos para geometrías más complejas.
- Queda demostrada la posibilidad de incorporación de las diferentes componentes energéticas presentes en el proceso de deformación, lo que permite realizar la discriminación de cada una de ellas para determinar su grado de influencia en el mismo, tal como se ha llevado a cabo con el rozamiento.
- La incorporación de los diferentes parámetros presentes en la deformación permiten un mayor acercamiento del modelo a la realidad, tal como ocurre con la implementación del endurecimiento por deformación estudiado.
- Así mismo, es posible determinar la velocidad de fluencia del material ya que, gracias al método desarrollado, se puede determinar la velocidad existente en cada zona rígida virtual establecida.
- Es posible establecer las curvas de representación de los esfuerzos para el proceso de deformación que se lleva a cabo, representando de esta forma el límite superior necesario para garantizar dicha deformación, teniendo en cuenta los distintos parámetros incluidos en el método.

#### 10.4 Líneas futuras de desarrollo

Al igual que en estudios anteriores de la misma índole, la investigación desarrollada en la presente Tesis Doctoral muestra un amplio abanico de posibilidades y aplicaciones que no ha sido posible abarcar en el periodo de tiempo establecido para la realización de ésta, por lo que se presentan ciertas líneas futuras de investigación que serían interesantes de desarrollar.

- Ampliar el estudio geométrico a diferentes configuraciones de la matriz de deformación o punzón, combinando los casos de punzón plano e inclinado, casos tridimensionales o modelos axisimétricos, superficies curvas, entre otras, extendiendo así el campo de aplicación del método del TLS mediante BRT en su disposición modular.

- Desde un punto de vista tecnológico, resultaría interesante ampliar el estudio a la aplicación del método a aquellos procesos de forjado incremental que se alejan más del proceso de indentación pura, como puede ser la forja orbital.
- En relación a los distintos parámetros contemplados, restan por incluir algunos otros, como puede ser la temperatura, que podrían ser igualmente analizados e implementados pero que en un primer estudio no han sido consideradas de mayor interés que los sí estudiados.
- Realizar una combinación de los procesos de forja e indentación para matrices con formas complejas, estableciendo el límite de aplicación para uno u otro, dependiendo del nivel de deformación alcanzado. Es decir, empleando un caso de forja cuando el material se vea desbordado y comience la formación de la rebaba, contemplar un caso de indentación.
- Por último, sería interesante el desarrollo de un programa informático para el tratamiento del método, que permita su utilización rápida en la industria, facilitando y ampliando su aplicación, tanto para el proceso de indentación como el de la forja, así como los de los distintos estudios desarrollados con anterioridad, siendo de mayor interés en el caso de la forja y la indentación por la posible combinación de ambos.

# Thesis English Summary

---

*Upper Bound Method Analysis, Development and Validation applied to  
Indentation Processes*

---



## THESIS ENGLISH SUMMARY

### E.1. Research Line

Focusing the following discussion on the wide field that represents manufacturing, the present study will be limited only on the forming processes by plastic deformation.

Nowadays, plastic forming still represents the best choice to obtain work-pieces with a large shapes and sizes diversity, further leading to the advantage of increasing the mechanical properties and the structural refinement of the material that is going to be deformed.

Within the field of forming processes by plastic deformation, this Doctoral Thesis focuses on those processes which manage metal deformation with direct compression efforts, such as the forging processes. Furthermore, in this field, the study is adjusted to the indentation process, a particularly case of the forging process, in which the material to be deformed is proportionally much larger than the die or punch used to deform the work-piece. Through the study it has been analyzed the influence of the intrinsic factors such as the material and the geometry of the work-piece; and the extrinsic factors such as the friction that takes place on the interface tool-work-piece. The indentation process was studied as a manufacturing process and not just as the testing process conventionally used for materials characterization.

Being this work the continuation of the study established by Dr. Francisco de Sales Martín [1], the aim was to raise and develop a theoretical analysis based method which establish a minimum value of the load necessary to achieve the deformation of the material. This developed method is easily applied and it has the capacity to incorporate significant parameters present in the aforementioned processes. Consequently, this new method expands the usability of the Modular configuration and opens it to other fields of study

Somehow, the numerical methods developed have helped the resolution of such problems, relegating the analytical methods to the background. The analytical methods are usually more complex and this complexity precludes their use in many cases. However, numerical methods have certain drawbacks and in many cases it is difficult to distinguish the parameters involved in the analysis explicitly. On the other hand, get to the complete mastery of these programs, whether based on finite elements or large calculation, requires

experience and it is not difficult to fall into the same repeated mistake sometimes without realizing it, being the results obtained equally erroneous.

The following thesis presents an alternative to numerical methods, based on the analytical method of the Upper Bound Theorem (UBT) by means of Triangular Rigid Zones (TRZ) [2], being these triangular zones rigid blocks of material. This approach enables the possibility of considering independently different parameters involved in the deformation process, such as the geometry of the work-piece, the geometry of surface in contact with the tool, the material type, the friction coefficients, the temperature, etc.

The method, as in previous studies mentioned, was applied to geometrical configurations of different complexity, being the limitation the consideration of a plane strain hypothesis. This study leads the way, in the near future, for other different case of studies.

The thesis began with a geometric approach of the model, in order to get the best modular configuration, as seen in the article published in the journal Materials Science Forum as "Analytical approach to the indentation process. Application of the Upper Bound Element Technique" [3]. In this article it is performed a methodological approach to a particular case of indentation, based on a case of plane strain and with a flat punch. Modular and non-modular model are developed for a single case, showing the advantages of the modular model and its greater suitability when a deformation by indentation is taking place. This article has been cited in two separate international articles [4, 5].

Subsequently, we considered the necessity of the introduction of the factors that are relevant in a forming process of these characteristics, such as the friction factor. From this study, another paper is elaborated, entitled as "Friction Influence on the Implementation of the Upper Bound Theorem in Indentation Process," presented at the International Congress of Vienna DAAAM and published in the Annals of DAAAM & Proceedings 2012 [6], and in the abstract it can be read: "With two approaches of different kind of friction, Tresca ( $m$ ) and Coulomb ( $\mu$ ) friction, different hodographs are present, corresponding to a kinematically admissible velocity field, and studying the influence in its both way. Applying the UBT with TRB for each modular disposition, considering the appropriate distribution and making these differences between the two types of friction, are achieved results consistent with those obtained in other plastic forming processes, both stationary and non-stationary. Finally it is shown the advantage of lower computational cost that offers this method of calculation as well as having identified at any time the physical evolution of the problem".

Once established the superiority of the modular model against the non-modular one and configured the appropriate deformation model, a set of optimizations in the model acquired are needed in order to bring the final results closer to the real values of deformation. It is necessary to clarify that the UBT always offers values that are over the real effort needed to achieve the deformation of the work-piece, so it is important to review the model in order to optimize it. The lower the final value of effort obtained, the lower the final energy loss is, since greater is the proximity to the real values of deformation. From this

section of the study emerges the article published in the Procedia Engineering journal, entitled “Analysis and selection of the modular block distribution in indentation process by the Upper Bound Theorem” [7], and the article published in the Materials Science Forum journal, entitle “Selection of the optimal distribution for the Upper Bound Theorem in indentation processes” [8]. In both articles it is cover a larger field of application with the geometry of the work-piece, working with finite and infinite cases and developing an appropriate model for each case. So, this new considerations leaves defined the field of work-pieces for which it is possible to conduct an indentation.

Once the final model is established, we proceeded to the verification of the model using different methods. The virtual verification, with programs such as DEFORM 2D/3D and ABAQUS 2D/3D, based on the Finite Element Method (FEM), and the experimental verification, with indentation trials on annealed Aluminium 2030. Thanks to the good results obtained, we proceeded to the preparation of the article “Validación experimental del Modelo Modular en la Aplicación del Teorema del Límite Superior a procesos de indentación”, that can be translated as “Experimental Validation of the New Modular Application of the Upper Bound Theorem in Indentation”, published in Anales de Ingeniería Mecánica, for the XX Congreso Nacional de Ingeniería Mecánica [9].

## E.2. Final Results

The articles published show a brief introduction to the extensive research that was conducted on the application of UBT for the indentation processes, in its modular configuration. This section summarizes the achievements and the future possible researches

The final model consists of three modules of two TRZ each. This final model is based on its homologue applied by the Slip Line Field (SLF) Method. The SLF shows a pattern of lines drawn at  $45^\circ$ . Due to some inconsistencies in the application of the UBT with only two modules and the intrinsic difficulty of the introduction of the friction factor, another module was introduced under the punch. Therefore, making the differentiation for finite and infinite work-pieces, the considerations to take into account are the followings:

### E.3.1. Infinite Work-piece

$$\theta_{\text{opt}} = 48,2^\circ \rightarrow h_{\text{opt}} = 0.894$$

$$\left(\frac{p}{2k}\right)_{\text{SLF}} = 2.571; \left(\frac{p}{2k}\right)_{\text{UBT}} = 2.5717 \quad \forall m = 0$$

#### E.2.1. Finite Work-piece

Its  $\theta_i$  (Figure 1) will depend on the height of the section of the work-piece. The length of the base of the external module it is limited by  $b' = L + 24\%H_T$ , being  $2L$  the length of the base of the punch. This percentage cannot be increased more due to the  $p/2k$  values

obtained, which are  $< 1$  at shape factors, where the infinite configuration is not taking place yet.

Figure E.1 shows the configuration of the middle module for a finite case. It can be seen that the height of the module ( $h$ ) is equal to the total height of a quarter of the work-piece studied ( $H_7$ ).

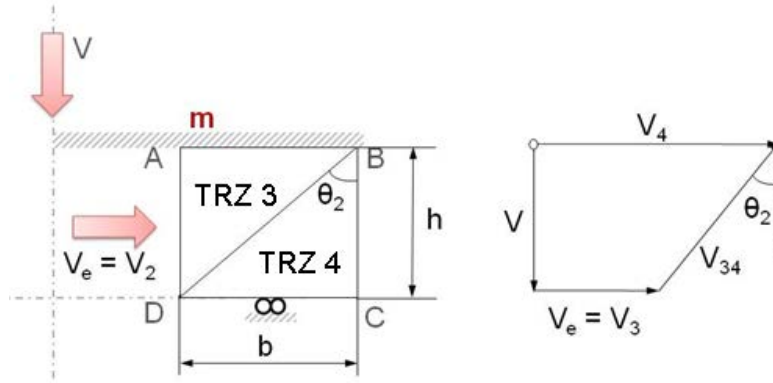


Figure E.1: Module B or second module of the Modular Model implemented.

### E.2.2. Finite/Infinite configuration

The finite or infinite configuration applied to the work-piece studied depends on the  $p/2k$  values. The change takes place when  $(p/2k)_{fin} > (p/2k)_{inf}$ .

### E.2.3. Work-piece base study

If the work-piece base is less than  $15L$ , the indentation is impossible without clamping or fixing the work-piece. In case of fixing the work-piece, the process is assimilated to a drawing process and it is out of the scope of the study of the present thesis.

If the base of the work-piece to indent is equal or greater than  $15L$ , the value of  $p/2k$  is constant. That is, holding other parameters unchanged, the variation of the base of the work-piece will not significantly affect the final outcomes.

### E.2.4. Friction factor

With this study, it has been found that the adhesion friction ( $m$ ) does not have much influence on the final results. The friction effect tends to fade into the vastness of the work-piece, compared to the punch, especially for infinite cases. However, in order to homogenize results, following the friction values available in the Handbook of Friction, lubrication, and wear technology [10], it is chosen a friction factor of  $m = 0,7$  as the more unfavorable option.



### E.2.5. Tilted punch

The tilt model may only be considered in the transition zone of the indentation process. When the base of the punch is complete, that is when the entire base is in contact with the material, it is possible to change to a flat punch case. In addition, the finite consideration will not take place because it would be like a punching or stamping process, outside the scope of the thesis.

### E.2.6. Hardening

We have worked, virtually, with Aluminium, Steel, Titanium and Superalloys. In total, 20 different materials. Three hardening models were adopted due to the inability to cover all the material options with a single model. These patterns depend on the hardening exponent ( $n$ ), being applicable  $\sigma = \sigma_o + K \cdot \varepsilon^n$ . By performing the appropriate substitutions, the equation pertinent is  $k = k_o + 0,6 \cdot K \cdot \varepsilon^n$ , knowing that  $\varepsilon = \ln(1 + e)$ . Thus:

Model 1: Applies hardening to all three modules

Model 2: Applies hardening to both modules under the punch

Model 3: Applies hardening to the first module only.

A classification was made according with the suitability of the results obtained in the application of the three models developed, as it is shown in Table E.1

Table E.1: Hardening Classification by  $n$

Materials	$n$	Model
Aluminium, Steel, Titanium	$0 \leq n \leq 0.10$	Model 3
	$n > 0.10$	Model 2
Superalloys	$0 \leq n \leq 0.12$	Model 3
	$n > 0.12$	Model 1

### E.2.7. Trials

First trials were made with tin and lead. These materials allow a relatively easy deep deformation, giving good results at slow indentation. The problem was that these type of materials have particular characteristics. Hardening takes place very quickly at high speeds and it does not increase proportionally to the deformation speed. However, these are not materials that are usually use in conventional deformation processes, so the final work-piece was made of Aluminium.

We worked with Aluminium 2030 annealed. The annealing process was provided in the laboratory (Figure E.2). So, after the annealing process was completed, tensile tests were performed to characterize the resulting material in order to be able to introduce them in the UBT modular model.

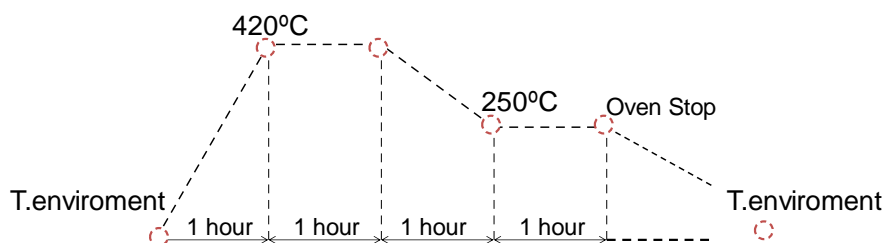


Figure E.2: Anneal sequence

#### E.2.8. M.E.F.

We worked with DEFORM 2D and 3D and ABAQUS 2D and 3D software. DEFORM was chosen because it is a software specialist in forming processes by plastic deformation and provides a simpler treatment of the entire problem, as well as more consistent results of the process.

Figure E.3 shows the comparison between the results obtained in the implementation of UBT by its modular configuration, with the ones obtained with the trials and the virtual application.

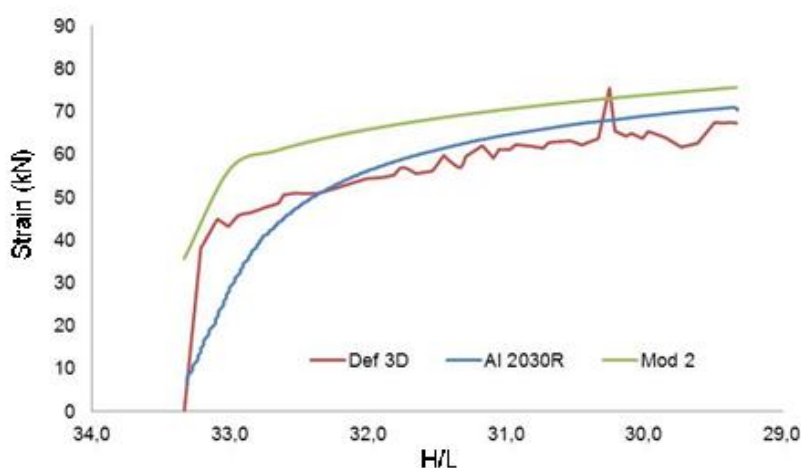


Figure E.3: Comparative between UBT, Trials and FEM

### E.3. Conclusions

A summary of the contributions completed in each of the previous chapters is made, making the appropriate comparison with the objectives that were established at the beginning of the thesis, in order to identify the objectives achievement.

The general conclusions of the study, where will be discussed broadly the core objectives achieved of the case study, are presented below. Subsequently, the particular conclusions will be discussed, showing those results and analysis developed alike to the general objectives. Finally, the thesis future development lines are presented. The future lines are based on the need of extend the results obtained, suggesting proposals suitable for a proper continuation of the study, new possibilities and the correct application of the developed method. This future projection is intended to leave the method open to encompass those fields that can remain open or be interesting to continue

### E.3.1. *General conclusions*

The achievement of the main objectives set out at the start of this thesis through the initial approach and justification is presented. The development of the present research allows obtaining the following general conclusions:

- The suitability to carry out in-depth studies of the indentation processes, as a primarily simplification of the incremental forging processes, is noted. Nowadays, the development of new manufacturing processes based on incremental forging is present in the manufacturing industry.

- At the same time, the great acceptance that has the Upper Bound Theorem on the articles and studies range consulted has been confirmed. However, the modular configuration covered in this Doctoral Thesis is not usually present, being an interesting line of research due to its simplicity, once the mathematical model is developed.

- We have managed to implement an analytical method for non-restricted flat-parallel geometries punches, which, moreover, allows the incorporation of the different parameters that can have place in plastic deformation processes, like friction or strain hardening.

- Also, we were able to make a classification for the work-piece studied as finite and infinite, identifying the shape factor and the suitable model in each case study.

- In the same way, a study of the friction associated with forming processes has been made, establishing that, for indentation cases, friction is diluted in the effort of deformation due to the relatively small size of the forming matrix with the work-piece. So, the friction influence is minimal.

- The model developed has been compared with different methods, both analytical and numerical, such as the Slip Line Field and the Finite Element Method. This way, the suitability of the Upper Bound Theorem under its modular configuration for its application in indentation processes is show.

### E.3.2. *Singular conclusions*

As well as the general conclusions raised in the preceding paragraph, to expose more specific conclusions derived from the research developed is possible. These singular conclusions are the following:

- A method that simplifies the efforts study against the current existing methods is sought. From a mathematical perspective, the Upper Bound Theorem application, under its modular configuration involves a less complicated implementation than other methods, including the selected methods with which were performed the comparison.

- Similarly, the application speed of the theorem can be appreciated. Its lower computational cost makes it a suitable method for the needed efforts achievement to perform the deformation required.

- The parts classification into two groups, finite and infinite, allows a broader solution since it covers the entire possible work-piece range for plastic deformation forming.

- Of these two configurations, the infinite one is considered to be of general application, since it covers the range of work-pieces normally employed in the industry for indentation processes. The range of finite parts resembles the work done in sheet metal process, which would increase the size of the developed method application field.

- The adaptation of the model to different geometries of the matrix of deformation or punch is possible due to the modular configuration versatility exposed and to the developed models, both for flat and inclined punches. Also, a combination of both models for more complex geometries is possible.

- The introduction of different energy parameters present in the deformation processes is feasible, allowing the discrimination of each of them to determine their influence degree as it has been conducted with friction.

- This parameters incorporation allows a greater model approach to reality, as it is the case of the hardening implementation studied.

- Similarly, determining the material flow speed is possible. Due to the developed method, the speed in each virtual rigid zone can established.

- To set the efforts representation curves for the deformation process that takes place is achievable. Thus representing the necessary upper limit to ensure such deformation, taking into account the different parameters included in the method.

### E.3.3. *Future development lines*

As in the earlier studies of the same nature, this research demonstrates a wide range of possibilities and applications that have not been possible to include in the time established for the thesis realization. So, in the next section, some research future lines that would be interesting to develop are exposed.

- Extend the geometric study to different die configurations, combining the cases studies of flat and inclined punch, three-dimensional cases or axi-symmetric models, curved surfaces, etc. thus extending the method application field.

- From a technological point of view, extend the study to the method application to the incremental forging processes which deviate more from pure indentation process, such as orbital forging.

- In relation to the different parameters contemplated, there are still some others that have not been considered of relevant interest in a first study, such as the temperature, that can be equally analyzed and implemented.

- Perform a forging and indentation combination for complex dies, establishing the application limit depending on the deformation level reached. That is to say, presenting a forging case, contemplate an indentation case when the burr starts to develop.

- Finally, development a computer program for the model implementation in the industry, facilitating and expanding its application for indentation and forging processes of indentation, being this of greater interest due to the possible combination of the two processes.

## References

- [1] F. Martín, "Development, integration and optimization in the study of forging process by the theorem of the upper limit through the model of triangular rigid blocks", Doctoral Thesis, Manufacturing Engineering, University of Málaga, 2009.
- [2] H. Kudo, "An upper-bound approach to plane-strain forging and extrusion-I", *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 1, pp. 57-83, 1960.
- [3] F. Martín, C. Bermudo, and L. Sevilla, "Analytical approach to the indentation process. Application of the Upper Bound Element Technique", *Materials Science Forum*, vol. 713, pp. 13-18, 2011.
- [4] V. C. Sathish Gandhi, A. Ramesh, R. Kumaravelan, and M. Thanmanaselvi, "Contact analysis of spherical ball and a deformable flat model with the effect of tangent modulus," *Structural Engineering and Mechanics*, vol. 44, pp. 61-72, 2012.
- [5] Y. H. Moon, C. J. Van Tyne, and W. A. Gordon, "An upper bound analysis of a process-induced side-surface defect in forgings: Part 2: Characteristics and criteria curves," *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 99, pp. 179-184, 2000.
- [6] Y. H. Moon and C. J. Van Tyne, "Validation via FEM and plasticine modeling of upper bound criteria of a process-induced side-surface defect in forgings," *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 99, pp. 185-196, 2000.
- [7] C. Bermudo, F. Martín, and L. Sevilla, "Analysis and selection of the modular block distribution in indentation process by the Upper Bound Theorem," *Procedia Engineering*, 2013.
- [8] Y. T. Lin and J. P. Wang, "A new upper-bound elemental technique approach," *Computers & Structures*, vol. 65, pp. 601-611, 1997.
- [9] J. P. Wang and Y. T. Lin, "The load analysis of the plane—strain forging processes using the upper-bound stream-function elemental technique," *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 47, pp. 345-359, 1995.
- [10] A. I. H. Committee, *Handbook of Friction, lubrication, and wear technology*: ASM International, 1992.

# ANEXO I

---

## RECOPIACIÓN HISTÓRICA SOBRE LA EVOLUCIÓN DEL ESTUDIO DE LA PLASTICIDAD DESDE 1980 HASTA LA ACTUALIDAD

*Análisis, Desarrollo y Validación del Método del Límite Superior en Procesos de  
Conformado por Indentación*

---





## Índice Anexo I

A.1.1. Resumen: Inicios-1980 .....	A.1.2
A.1.2. 1980 en adelante .....	A.1.5
A.1.2.1.Criterios de Fluencia .....	A.1.5
A.1.2.2.Modelado del efecto Bauschinger .....	A.1.10
A.1.3. Líneas generales de desarrollo.....	A.1.11
A.1.3.1.Década de los 80 .....	A.1.11
A.1.3.2.Década de los 90 .....	A.1.13
A.1.3.3.Siglo XXI .....	A.1.14
A.1.4. Esquema Evolutivo hasta 1980 .....	A.1.16
A.1.5. Esquema Evolución Criterios de Fluencia.....	A.1.17
A.1.6. Evolución Modelos de Esfuerzos.....	A.1.18



### A.1. RECOPIACIÓN HISTÓRICA SOBRE LA EVOLUCIÓN DEL ESTUDIO DE LA PLASTICIDAD DESDE 1980 HASTA LA ACTUALIDAD.

La teoría matemática de la plasticidad representa el primer intento de proporcionar un marco racional, dentro del cual poder formular de forma constitutiva las ecuaciones que rigen el comportamiento de un material deformado plásticamente. En el desarrollo de estas ecuaciones habrá que tener en consideración:

- La necesidad de unos límites bien definidos para los estados de tensión admisibles.
- La característica de la fluencia de la deformación en estados extremos de fallo, con la velocidad de deformación dependiente de la actual tensión en vez del ratio de tensiones.

Los cimientos de la teoría clásica de la plasticidad se remontan a las obras fundamentales de Hill (1950) y Koiter (1960).

Un repaso completo de esta temática se puede encontrar, por ejemplo, en los tratados de Lubliner (1990), Simo y Hughes (1997), Simo (1998), Han y Reddy (1998), Lubarda (2001) y Houlsby y Puzrin (2006). En cuanto a la aplicación de las mismas a otras disciplinas, como el caso de la mecánica de suelos, pueden ofrecer buenas referencias los trabajos realizados por Desai y Siriwardane (1984), Zienkiewicz et al. (1999), Houlsby y Pyzrin (2006), Chen (2007) [1] y Nova (2010).

La aplicación de los conceptos de la plasticidad, en cuanto a los criterios de fallo y condiciones de fluencia, aparecen ya en los trabajos de Coulomb (1773) (Figura A.1.1) y Rankine (1853). Estos conceptos, aún hoy, siguen formando parte de las bases de los métodos de análisis límite, ampliamente utilizados en la práctica.



Figura A.1.1: C.A. Coulomb

A continuación se procederá a mostrar la evolución sufrida en los estudios sobre la plasticidad, así como los distintos frentes abiertos, distintas discusiones y enfoques en temáticas similares y últimos avances.

Se comenzará con una breve descripción del periodo anterior al que ha servido de base para el desarrollo del presente estudio:

#### A.1.1. Resumen: Inicios-1980

Existen diversos trabajos significativos en el ámbito del conformado plástico sobre ciertos materiales realizados por Coulomb (1773) [2, 3], Poncelet (1840) y Rankine (1853), pero se considera el primer trabajo científicamente relevante, en cuanto a comportamiento plástico sobre metales, al llevado a cabo por Tresca [4] en 1864, de donde se deriva el conocido “criterio de fluencia de Tresca” o “criterio de tensión cortante máxima”.

Es Saint-Venant en 1870 quien aplica el criterio de Tresca, considerándose iniciador de la teoría matemática de la plasticidad, junto a Levy, que también en ese año estudia y desarrolla las ecuaciones que relacionan la tensión y la velocidad de deformación de un sólido rígido-plástico perfecto para situaciones tridimensionales generalizadas.

Posteriormente existe un avance lento y poco fructuoso, hasta la llegada del estudio de tubos bajo acciones combinadas realizado por Guest en 1900 [5]. En 1909, Heary y von Karman obtuvieron ecuaciones de plasticidad aplicando un principio variacional, propiciando un período de mayor desarrollo tanto teórica como experimentalmente. De ello se derivan discrepancias respecto al comportamiento de la fluencia en relación al criterio de máxima tensión cortante. Por este motivo, y para solventar las citadas discrepancias, surgen criterios alternativos.

En 1913, von Mises (Figura A.1.2), siguiendo una de las líneas teóricas de Huber (Figura A.1.2) de 1904, formula el criterio de fluencia que lleva su nombre, a su vez interpretado por Henky en términos de energía de deformación debida a tensiones cortantes, denominándose a partir de entonces “criterio de energía de deformación máxima”.



Figura A.1.2: M.T. Huber (izq) y von Mises (dcha)

Será nuevamente Hencky quien descubra, en 1923, las propiedades geométricas de los campos de deslizamiento en deformación plana, modelo completado en 1930 por Geiringer (Figura A.1.3) con las ecuaciones de compatibilidad de la velocidad a lo largo de las líneas de deslizamiento.

Nadai [6], en torno a 1923 comienza sus estudios sobre indentación en superficies planas, siendo en 1931 cuando desarrolla la idea propuesta por Hencky en 1923 para abordar de forma analítica las pequeñas deformaciones plásticas, siendo la escuela rusa quien emplea este proceso a partir de 1935.

Von Kármán, en 1925, implementa un método elemental para analizar el estado de la tensión en la laminación, siendo Sachs (1927) y Siebel (1933) quienes aplican teorías similares al estirado del alambre, obteniendo por Sachs en 1934 el método de análisis local de tensiones.

Siguiendo otra línea de investigación, Lode validó las ecuaciones de Levy-Mises en 1926 y presentó diferencias, confirmadas por Taylor y Quinney en 1931 mediante ensayos más precisos, comenzando así, en 1932, un nuevo modelo teórico basado en las principales propiedades plásticas y elásticas de un metal isótropo.

Hilda Geiringer (Figura A.1.3) trabajó en el Instituto de Matemáticas Aplicadas en la Universidad de Berlín como asistente de von Mises y fue ampliamente reconocida por sus estudios pioneros sobre matemáticas aplicadas, elasticidad y plasticidad de los materiales [7]. Su interés matemático sufrió un cambio hacia la probabilidad y el desarrollo matemático de la teoría de la plasticidad, siendo en 1930 cuando su trabajo sobre plasticidad le llevó a desarrollar las ecuaciones fundamentales de Geiringer para deformaciones producidas en régimen de deformación plana.



Figura A.1.3: Hilda Geiringer  
Fuente: citizendium.org

Reuss, en 1930, siguiendo una sugerencia de Prandtl, adoptó la hipótesis de que la componente de la deformación plástica aumenta proporcionalmente a los tensores desviadores y cortantes, siendo Schmidt (1932) y Odquist (1933) quienes idearon un método para incorporar el endurecimiento por deformación a la ecuación de Levy-Mises.

Vuelve a producirse un estancamiento de los estudios hasta principios de los años cuarenta del pasado siglo, cuando, con motivo de la segunda guerra mundial, se llevaron a cabo interesantes desarrollos en esta materia, siendo Hill en 1950 quien recoge gran parte de los trabajos llevados a cabo durante la década de los 40 [8].

A partir de la publicación del libro de Nadai “Plasticity” en 1931 [9], considerado como uno de los precursores sobre manuales que abordan la teoría de la plasticidad y análisis de procesos de conformado por deformación plástica, se han ido editando distintas obras de carácter genérico:

- Década 50/60: Hill (1950), Prager y Hodge (1951), Bridgman (1952), Hoffman y Sachs (1953), Sachs (1954) y nuevamente Prager (1959).
- Década 60/70: Prager (1961), Dieter (1961), Johnson y Mellor (1962), Ford y Alexander (1963), Alexander, Brewer y Rowe (1963), Rowe (1965) y Avitzur (1968)
- Década 70/80: Johnson, Sowerby y Haddow (1970), Lange (1972), Rowe (1977), Slater (1977) y Szczepinski (1979)

La publicación de dichos manuales ha ayudado a consolidar los conocimientos sobre plasticidad establecidos hasta el momento sobre materiales metálicos. Algunos de los métodos que contemplan de manera precisa la deformación plástica son, por ejemplo, el Método de Campos de Líneas de Deslizamiento (CLD), aplicable únicamente a casos de deformación plana, y del que se han ido desarrollando diversos modelos aplicables a casos de compresión sin rozamiento y de extrusión, llevados a cabo por Green [10] durante los años 1951 a 1954, de compresión con rozamiento de Coulomb por Alexander en 1955, así como un número elevado de procesos de conformado por deformación recogidos por Johnson, Sowerby y Haddow en 1970 [11].



Figura A.1.4: W. Prager

Son Drucker, Greenberg y Prager (Figura A.1.4) en 1951 quienes plantean un nuevo método analítico aplicando los teoremas del límite superior e inferior, denominado Método de Análisis Límite o Teoremas del Límite, siendo Johnson y

Mellor, en 1957, quienes recogen numerosos ejemplos de empleo de este nuevo método, aplicado a casos de deformación plana

Por otro lado, y no menos importante, a partir de la década de los 50/60 del siglo XIX, al producirse la llegada de los primeros equipos computacionales, comienzan a desarrollarse los métodos numéricos o Métodos de Elementos Finitos (MEF), método numérico general para la aproximación de soluciones de ecuaciones diferenciales parciales.

La llegada de la computadora electrónica permitió el resurgimiento del método de los desplazamientos ya conocidos en siglos anteriores (Navier, Lagrange, Cauchy), pero que eran difíciles de aplicar dado que al final conducían a la resolución de enormes sistemas de ecuaciones inabordables de forma manual.

Cuando las aplicaciones prácticas de elementos finitos crecieron en tamaño, los requerimientos de tiempo de cálculo y memoria de los ordenadores crecieron. En ese punto, el desarrollo de algoritmos más eficientes se volvió importante. Para la resolución de los sistemas de ecuaciones, se potencia el estudio de la adaptabilidad de los algoritmos ya conocidos (Gauss, Cholesky, Crout, Gradiente conjugado, etc)

Con la aparición de los centros de cálculo y los primeros programas comerciales en los años 60, el MEF, a la vez que se populariza en la industria, refuerza sus bases teóricas en los centros universitarios.

En los años 70, se produce un gran crecimiento de las publicaciones al respecto, así como en la extensión del método a otros problemas más complejos, como son las no linealidades. Se estudian nuevos tipos de elementos y se sientan las bases matemáticas del método, que anteriormente se asimilaba más a una técnica ingenieril que a un método numérico matemático.

### **A.1.2. 1980 en adelante**

#### **A.1.2.1. Criterios de Fluencia**

Retomando el último campo desarrollado en el apartado anterior, gracias a la generalización de los ordenadores personales en la década de los 80, se extiende el uso de los programas comerciales que se especializaron en los diversos campos, instaurándose el uso de los pre y postprocesadores gráficos, que realizan el mallado y la representación gráfica de los resultados. Se continúa en el estudio de la aplicación del método a nuevos modelos de comportamiento (plasticidad, fractura, etc.) y en el análisis de los errores.

En la actualidad, dentro del campo estructural, el MEF comparte protagonismo con el Método Matricial, siendo muchos los programas que realizan el análisis de forma simultánea por ambos métodos, debido, sobre todo, a la mayor necesidad de memoria que requiere el análisis por elementos finitos. Así, se ha relegado la aplicación del MEF para el análisis de elementos continuos al tipo placa plana,

mientras que los pórticos siguen todavía discretizándose en barras y utilizando el Método Matricial.

Desde el rápido declive en el coste de los ordenadores y el fenomenal incremento en la potencia de cálculo, el MEF ha desarrollado una increíble precisión. A día de hoy, los superordenadores son capaces de dar resultados muy precisos para todo tipo de parámetros.

Ejemplos de la aplicación de este método se presentan en publicaciones como *“Modelado numérico de conformado de metales usando la formulación del flujo viscoplástico y el método de Elementos Finitos”*, de E. Oñate [12], donde se estudia la influencia del rozamiento mediante una modelización de elementos finitos en los procesos de conformado.

No obstante, la presente línea de trabajo se centrará en el estudio de la evolución sobre los métodos analíticos, de los que posteriormente derivan los algoritmos adecuados para su implementación computacional.



Figura A.1.5: Rodney Hill

Fuente: The Telegraph. Article “Professor Rodney Hill” 2011

Es en 1980 cuando Hill (Figura A.1.5) revisa su propio criterio de fluencia de 1950, ya que éste no podía describir el comportamiento plástico de algunos materiales como las aleaciones de aluminio, lo que llevó a diversos autores a identificar este comportamiento como anómalo. Hill asume la isotropía planar, donde los ejes pueden ser orientados arbitrariamente en el plano del metal laminado y los términos asociados a los esfuerzos cortantes no son necesarios. Es en 1989 cuando J. Lian, D. Zhou y B. Baudalet [13] presentan las ventajas de este nuevo criterio, ya que puede describir el comportamiento “anómalo” de los materiales, tiene una formulación relativamente sencilla y lleva a una expresión analítica asociada a la regla de fluencia con tensión equivalente.

En 1990 Hill vuelve a reformular el criterio de fluencia, puesto que el anterior no puede utilizarse cuando las direcciones de las tensiones principales son coincidentes con los ejes ortotrópicos, causando limitaciones severas a la aplicación. Desarrolla entonces una generalización del criterio expresándolo en un sistema de coordenadas



generales. Y no es hasta 2006 cuando Leacock [14] extiende la formulación propuesta, utilizando siete parámetros mecánicos en la identificación del proceso, dando, por lo tanto, mejores predicciones en superficies de fluencia y distribución plana para tensiones de fluencia uniaxiales y coeficientes de anisotropía plástica.

Se observó que algunos materiales, especialmente aleaciones de aluminio y latones, tienen parecidas tensiones de fluencia pero diferente coeficiente de anisotropía en las direcciones transversales. Por ello, en 1993, Hill [15] vuelve a proponer un nuevo criterio de fluencia capaz de modelar los comportamientos anómalos de primer y segundo orden. No obstante, aun existen desventajas:

- La función de fluencia no es homogénea respecto a  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ , por lo que no permite obtener expresiones explícitas sobre el incremento de tensiones.
- Sólo se puede utilizar si las direcciones de los esfuerzos principales son coincidentes con los ejes ortotrópicos.
- No permite describir la variación del coeficiente de anisotropía ni la tensión de fluencia uniaxial en el plano laminar.

Por lo tanto, la aplicación del criterio de fluencia es limitada en estos aspectos.

A parte de la familia de criterios desarrollados por Hill, se debe mencionar otro tipo de modelos basados en la formulación isotrópica propuesta por Hershey [16]. Sería Hosford quien, en 1979, propone un criterio de fluencia independiente del criterio de Hill, diferenciándose en la forma de determinar el exponente  $a$ , ya que Hosford lo asocia a la estructura cristalográfica del material (Ec. A.1.1).

$$F|\sigma_{22} - \sigma_{33}|^a + G|\sigma_{33} - \sigma_{11}|^a + H|\sigma_{11} - \sigma_{22}|^a = \sigma^a \quad \text{Ec. A.1.1}$$

En 1987 se propone una formulación más general del criterio de Hosford de la mano de Barlat y Richarmond [17], expresando la ecuación en función del sistema de coordenadas XYZ, no necesariamente coincidente con el de las direcciones principales de deslizamiento (Ec. A.1.2).

$$f = |k_1 + k_2|^M + |k_1 - k_2|^M + |2k_2|^M = 2\sigma_e^M \quad \text{Ec. A.1.2}$$

Tanto  $k_1$  como  $k_2$  son invariantes del tensor de tensiones mientras que  $M$  es un exponente integral que tiene el mismo significado que el anterior exponente  $a$ . En 1989, Barlat y Lian [18] publican la ecuación generalizada para materiales con comportamiento anisotrópico planar introduciendo la siguiente ecuación de fluencia (Ec. A.1.3).

$$f = a|k_1 + k_2|^M + a|k_1 - k_2|^M + c|2k_2|^M = 2\sigma_e^M \quad \text{Ec. A.1.3}$$

Entre las ventajas introducidas con este criterio, se pueden destacar el número reducido de parámetros mecánicos utilizados en la identificación y que esta se produce de forma relativamente sencilla. También ofrece una predicción bastante acertada del lugar de la cortadura para aleaciones de aluminio sin una gran anisotropía.

En 1991, es nuevamente Barlant [19] quien propone un criterio de fluencia de seis componentes ( $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{33}$ ,  $\sigma_{12}$ ,  $\sigma_{23}$ ,  $\sigma_{31}$ ) que puede ser adaptado sin restricciones referentes al estado de tensión, por lo que la ecuación se reescribe (Ec. A.1.4) en función de las tensiones de desviación principales  $S_1$ ,  $S_2$  y  $S_3$ .

$$\Phi = |S_1 - S_2|^m + |S_2 - S_3|^m + |S_3 - S_1|^m = 2\sigma_e^m \quad \text{Ec. A.1.4}$$

Estudios experimentales demostraron que el comportamiento plástico de las aleaciones de aluminio, eran realmente difíciles de modelar con los criterios mostrados hasta el momento y no es hasta principios de 1990 que distintos investigadores se interesan por el problema.

Alrededor de 1993, Karafillos y Boyce [20] proponen una ecuación de fluencia muy general. Originalmente se formula la función de fluencia (combinación entre von Mises y Tresca) así como la transformación lineal para pasar de un caso isotrópico a anisotrópico.

Esta metodología es usada en 1997 por Barlat et al [21], quienes proponen una expresión aún más general del criterio de fluencia. La variación consiste en darle valores de carga a los términos mostrados en la Ec. A.1.5, relacionados con la anisotropía del material.

$$\Phi = \alpha_x |S_1 - S_2|^m + \alpha_y |S_2 - S_3|^m + \alpha_z |S_3 - S_1|^m = 2\sigma_e^m \quad \text{Ec. A.1.5}$$

El problema que surge con este modelo es, entre otros, que las derivadas de la tensión equivalente son complicadas de obtener analíticamente y, en consecuencia, el empleo de este modelo es bastante reducido.

Desde el año 2000 aproximadamente, la representación del comportamiento anisotrópico de los materiales ha influenciado muchas investigaciones enfocadas en el desarrollo de un criterio de fluencia apropiado. Varios modelos nuevos han sido propuestos durante los últimos años, todos ellos excelentes en cuanto a la descripción del comportamiento anisotrópico, tanto para las aleaciones de aluminio como para los aceros. Los nuevos criterios incorporan un gran número de coeficientes (normalmente ocho) y gracias a esto, es posible dar una descripción apropiada del comportamiento de fluencia.

En el año 2000, Barlat (Figura A.1.6) propone un modelo nuevo particularizándolo para el tipo de deformación plana [22]. Este criterio de fluencia ha sido probado para diferentes aleaciones de aluminio, demostrando una anisotropía

pronunciada. El modelo demuestra su capacidad de dar una predicción del comportamiento de las desviaciones planares de la tensión de fluencia uniaxial y del coeficiente plástico anisotrópico, pero incluye una serie de desventajas, como la excesiva complejidad de la formulación.



Figura A.1.6: Frédéric Barlat

Fuente: Daily Unn

También en el año 2000, los miembros de CERTETA<sup>1</sup> comenzaron sus investigaciones en torno a un modelo capaz de proporcionar una descripción precisa del comportamiento superficial de fluencia mediante textura computacional, desarrollándose en las bases de la formulación isotrópica propuesta por Hershey. Añadiendo coeficientes de carga, se dio paso a un criterio de fluencia flexible. La última versión incorpora ocho coeficientes y, en consecuencia, la identificación del proceso utiliza ocho parámetros mecánicos. La primera formulación de este nuevo criterio la realizaron Banabic, Balan y Comsa [23] y por ello recibe el nombre de “criterio de fluencia de BBC”. Una modificación del modelo (BBC 2005) fue implementada en el programa comercial de elementos finitos AutoForm 4.1 (Figura A.1.7), lanzado en mayo de 2007.

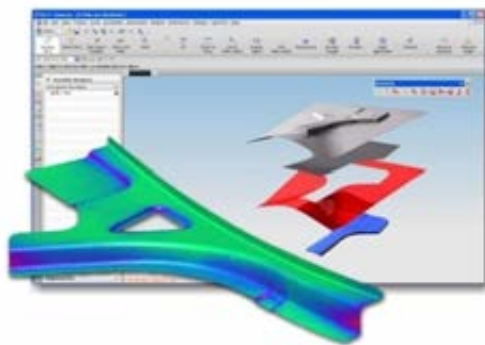


Figura A.1.7: AutoForm

Fuente: AutoForm Engineering GmbH

<sup>1</sup> Research Center in sheet Metal Forming technology. Technical University of Cluj Napoca, Romania ([www.certeta.utcluj.ro](http://www.certeta.utcluj.ro))

Por otra parte, para introducir la ortotropía en la expresión del criterio isotrópico, Cazacu y Barlat [24] proponen un método alternativo sobre la representación de los tensores. Desarrollan un método de generalizaciones de los invariantes de los tensores de desviación  $J_2$  y  $J_3$ . Basándose en este método, se obtiene una ecuación sustituyendo la expresión de las tensiones de desviación invariantes en el criterio isotrópico mediante sus respectivas formas anisotrópicas. La ventaja más importante de este criterio consiste en la capacidad de obtener un resultado bastante acertado del comportamiento en relación a la tensión y compresión específico de aleaciones de magnesio y titanio.

Vegter, en 2006 [25], obtiene los puntos de fluencia en el primer cuadrante, aplicando la interpolación de Bezier y utilizando puntos de fluencia que han sido determinados directamente por experimentación. El criterio de Vegter requiere determinar tres parámetros para cada punto de referencia, y para describir la anisotropía planar se necesitarán 17 parámetros.

Durante los últimos años, una nueva familia de criterios de fluencia polinómicos ha sido creada utilizando las bases del criterio de Hill. A continuación se describirán alguno de estos nuevos criterios.

Hu [26] propone el criterio expuesto en la Ec. A.1.6.

$$f(\sigma_{ij}) = \frac{1}{\sigma_0^4} \sigma_{11}^4 - \frac{4R_0}{(1+R_0)\sigma_0^4} \sigma_{11}^3 \sigma_{22} + \left[ \frac{1}{\sigma_b^4} - \frac{1}{\sigma_0^4} - \frac{1}{\sigma_{90}^4} + \frac{4R_{90}}{(1+R_{90})\sigma_{90}^4} + \frac{4R_0}{(1+R_0)\sigma_0^4} \right] \sigma_{11}^2 \sigma_{22}^2 - \frac{4R_0}{(1+R_{90})\sigma_{90}^4} \sigma_{11} \sigma_{22}^3 + \frac{1}{\sigma_{90}^4} \sigma_{22}^4 + \left[ \frac{16}{(1+R_{45})\sigma_{45}^4} - \frac{2}{\sigma_b^4} \right] (\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22}) \sigma_{12}^2 + \left[ \frac{1}{\sigma_b^4} + \frac{16R_0}{1+R_0} + \frac{16R_{45}}{1+R_{45}} \right] \sigma_{12}^4 = 1 \quad \text{Ec. A.1.6}$$

Posteriormente desarrolló un modelo 3D de su propio criterio en 2005 y una formulación cuadrática de la función de fluencia en 2007.

Mientras tanto, Wang propuso, en 2005, una formulación polinómica 2D. En 2006, Comsa desarrolla, en su tesis doctoral, un criterio polinómico de sexto orden [27] y en 2007, Soare [28] propone tres criterios de cuarto, sexto y octavo orden.

Hasta la fecha, los criterios que se utilizan con mayor frecuencia suelen ser los criterios de Hill de 1948 y 1990, así como el de Barlat de 1989.

#### A.1.2.2. Modelado del efecto Bauschinger

El Efecto Bauschinger (Figura A.1.8), denominado en homenaje a su creador Johann Bauschinger, consiste en el hecho de que al deformar un metal en una dirección hasta que se ha sobrepasado su límite de elasticidad, y deformándolo después en la dirección contraria, su límite de proporcionalidad en esta última dirección es menor. El motivo para que esto ocurra, entre otros, es debido a las imperfecciones que contiene el material.

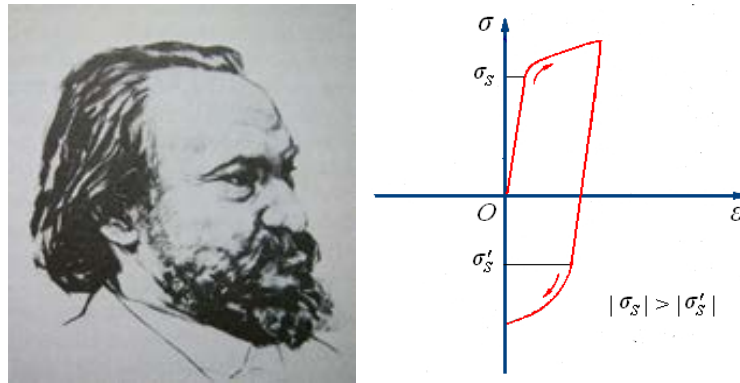


Figura A.1.8: Bauschinger y el efecto Bauschinger

Generalmente se predice utilizando el endurecimiento anisotrópico, también conocido como distorsión, que describe una transformación general de la superficie de fluencia durante la deformación plástica.

En 1990, Prager desarrolla su propio modelo de endurecimiento, donde estudia la traslación pura de la superficie de fluencia, asumiendo que durante la carga la tensión se desarrolla en la misma dirección que el incremento del esfuerzo plástico [29]. En ese mismo año, Chamboche presenta un modelo mixto gobernado por una superposición no lineal isotrópica y un endurecimiento cinético.

En 1996, para conseguir una descripción más correcta y suavizar la transición de fase elástica a plástica, Armstrong y Frederick [30] sugieren enlazar la ecuación de Prager con la de Bailey-Orowan.

Es Yoshida y Uemori [31] en 2002 quienes desarrollan un modelo mejorando el de Chamboche, el cual describe la replastificación temprana y el estancamiento que se produce en el endurecimiento.

Ya en 2008 será cuando se desarrollará un modelo de acercamiento al efecto Bauschinger para mejorar la predicción de la recuperación elástica mediante elementos finitos, bajo el programa comercial AutoForm [32].

### A.1.3. Líneas generales de desarrollo

#### A.1.3.1. Década de los 80

V. M. Segal, basándose en estudios de P. W. Bridgman, de la Universidad de Harvard, sobre el desarrollo del principio de la deformación plástica severa (SPD) en la década de 1930, desarrolla en 1980, junto a sus compañeros de la Unión Soviética, la técnica de HPT (High Pressure Torsion) y el ECAE o ECAP (Equal Channel Angular Extrusion/Processing), como se muestra en la Figura A.1.9. Esta técnica continuó desarrollándose, siendo R. Z. Valiev y compañía quienes, a finales de los ochenta, fueron los pioneros en aplicarla a la producción de metales de grano ultrafino.

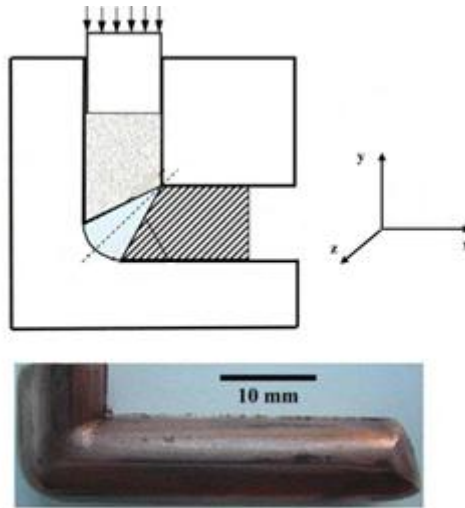


Figura A.1.9: ECAE [33]

Muchos investigadores se han dedicado a esta temática, lo que les ha llevado, alrededor del año 2000, al desarrollo sistemático de materiales con nanoestructuras y propiedades excepcionalmente favorables [34].

Alrededor de 1983, Mao-hong Yu [35] propone la teoría del efecto cortante doble (Twin Shear Theory). Siguiendo sus estudios en esta línea de investigación, en 1991 propone la teoría unificada de esfuerzos (Unified Strength theory), muy favorable para resolver problemas de plasticidad. Gran parte de su obra se recoge en el libro “*Unified Strength Theory and its Applications*” escrito por el autor en 2004 [36]. También cabe destacar la introducción, por este mismo autor, de un nuevo criterio de fallo, en 1992. La teoría del efecto cortante doble para materiales metálicos, la teoría generalizada del efecto cortante doble para geomateriales y la teoría de esfuerzos unificados fueron propuestas por él hasta 1991.

La teoría de esfuerzos unificados ha sido generalizada para los modelos constitutivos elasto-plásticos, la teoría de los planos de deslizamientos unificados para problemas con deformación plana y, la línea de caracterización unificada para problemas de tensiones en el plano y axisimétricos en 1994, 1997 y 2001 respectivamente. Las teorías descritas han sido mencionadas en un elevado número de publicaciones y han sido implementadas mediante códigos de elementos finitos en estudios llevados a cabo en China, Japón, Singapur y Estados Unidos.

Como curiosidad y para mostrar las similitudes en las que se pueden recaer desarrollando los estudios mencionados, C. S. Desai en 1988 escribe una interesante carta [37] donde indica que el modelo presentado por Lode y Fim en ese mismo año, en el que dan a conocer el uso de una única ecuación para la superficie de fluencia para describir el endurecimiento o la fluencia continua del material, es esencialmente el mismo que el modelo HSS (Hierarchical single surface) propuesto por Desai y sus compañeros en 1982.

Con relación al Teorema del Límite Superior (TLS), en 1984 son Tau, Hasegawa y Nishino quienes describen un método de análisis límite combinando las características de los enfoques ya consolidados del límite superior e inferior, aplicándolo a vigas de hormigón armado. Durante 1986, Lange y P. Hansen describen un método híbrido del TLS para cargas límites, estableciéndolo para variables generales y conteniendo supuestos cinemáticos y constitutivos.

Durante esta década y las siguientes, se desarrollan numerosos estudios aplicando el TLS para casos concretos de deformación plástica.

Cabe destacar que en 1985, Lange escribe un manual que se convierte en una obra referente en el campo de la deformación plástica. Y en 1987, es Alexander en el segundo volumen de su obra quien plantea los principales elementos de la teoría de la plasticidad.

#### A.1.3.2. *Década de los 90*

H. Jahed, S. B. Lambert y R. N. Dubey presentan un estudio [38] con el que aplicar la teoría de la deformación total a casos de cargas no proporcionales, una teoría capaz de analizar una secuencia lineal de cargas. Estimando el campo de tensiones necesario y utilizando la deformación plástica convencional, se plasma en la formulación propuesta para predecir los esfuerzos.

Krent [39] presenta un modelo basado en las familias de superficies límites considerando la tercera invariante del tensor tensión, capaz de describir la sensibilidad de la respuesta geométrica plástica de una fuerza o tensión hidrostática (Ec. A.1.7).

$$F = J_2 + \alpha I_1^2 + \gamma I_1 + \beta I_1 J_3^{1/3} = K^2 \quad \text{Ec. A.1.7}$$

Un nuevo modelo constitutivo para los estudios de plasticidad, dependiente de la velocidad, en materiales porosos, es desarrollado por Foting y F. Ziegler en 1995.

Diversos modelos o criterios han sido descritos a lo largo del siglo XX, desde los modelos basados en un solo parámetro a los que tratan diversos parámetros en una misma formulación. La mayoría de ellos son adaptaciones de la teoría de esfuerzos a distintos tipos de material y se pueden clasificar en tres grupos:

- Single-Shear Strength Theory (SSST)
- Octahedral-Shear Strength Theory (OSST)
- Twin-Shear Strength Theory (TSST)

Las TSST son una nueva serie de modelos lineales y utilizan el modelo del límite superior para todos las posibles superficies límites convexas en el plano  $\pi$ .



En general, los criterios que utilizan un parámetro, se usan para materiales que soportan el mismo esfuerzo tanto en compresión como en tracción ( $\sigma_C = \sigma_T$ ). Los que utilizan dos parámetros, se utilizan para materiales cuya tensión de fluencia a tracción es menor que la de compresión ( $\sigma_C > \sigma_T$ ). así como para materiales cuya tensión de compresión no es igual a la resistencia a la tensión uniaxial, y la tensión de compresión biaxial no es igual a la tracción de compresión uniaxial ( $\sigma_C \neq \sigma_T \neq \sigma_T$ ).

Hoy día, la teoría de las tensiones están generalizadas no solo para los problemas de materiales elasto-plásticos o con endurecimiento sino también para los de reblandecimiento, para los comportamientos elástico-plástico quebradizos, discontinuidades, localizaciones y bifurcaciones, propagación de microfracturas, viscoplasticidad, fatiga, fractura, etc.

#### A.1.3.3. Siglo XXI

Podemos afirmar que las investigaciones analíticas van de la mano de las investigaciones de elementos finitos, ya que se considera un recurso fiable para realizar comparativas y concretar y corregir los resultados, por lo que, en ocasiones, ambas vías de investigación se confunden en una sola, ofreciendo datos de ambos tipos. A continuación se mostrarán diversos estudios que corroboran estas prácticas:

Nemat-Nasser (Figura A.1.10), a partir del año 2000, demuestra experimentalmente a qué es debido el incremento observable de la tensión de fallo en las membranas metálicas [40], continuación de sus estudios sobre laminación metálica fina (0.1 y 10.0  $\mu\text{m}$ ) en compañía de Choi y Suresh (2002), Hommel y Kraft (2001) o Espinosa (2004). En 2004, recupera el modelo de Hopkinson y crea un modelo basado en el tipo de dislocación que incluye algunas constantes de material y sirve para caracterizar un amplio rango de materiales [41]. A su vez, Espinosa desarrolla un modelo experimental de desviación sobre la deflexión de las membranas y lo emplea para estudiar el efecto del tamaño en la respuesta mecánica de láminas policristalinas de FCC.



Figura A.1.10: Nemat-Nasser  
Fuente: Society for Experimental Mechanics, Inc

Es en el año 2001, cuando N. A. Fleck y J. W. Hutchinson [42] formulan una nueva teoría sobre el gradiente de tensión para adaptarlo a más de un parámetro de



longitud de material, con el objetivo de generalizar la clásica teoría de flujo  $J_2$  para que pudiera representar los efectos que surgen en la deformación a microescala.

Andrzej Ambroziak, en 2005, propone un procedimiento para elementos finitos (FEM) para análisis no lineales, tanto estáticos como dinámicos, incluyendo la ecuación elasto-viscoplástica del modelo Bodner-Partom, comparando las simulaciones numéricas con experimentos para validar el procedimiento. Mientras que en 2010, Franck Pastos y Etienne Loute proponen una descomposición original para aproximarse al Método del Límite Superior del análisis límite, basándose en una combinación de elementos finitos, utilizando campos de velocidades discontinuos lineales o cuadráticos, presentado todo en deformación plana.

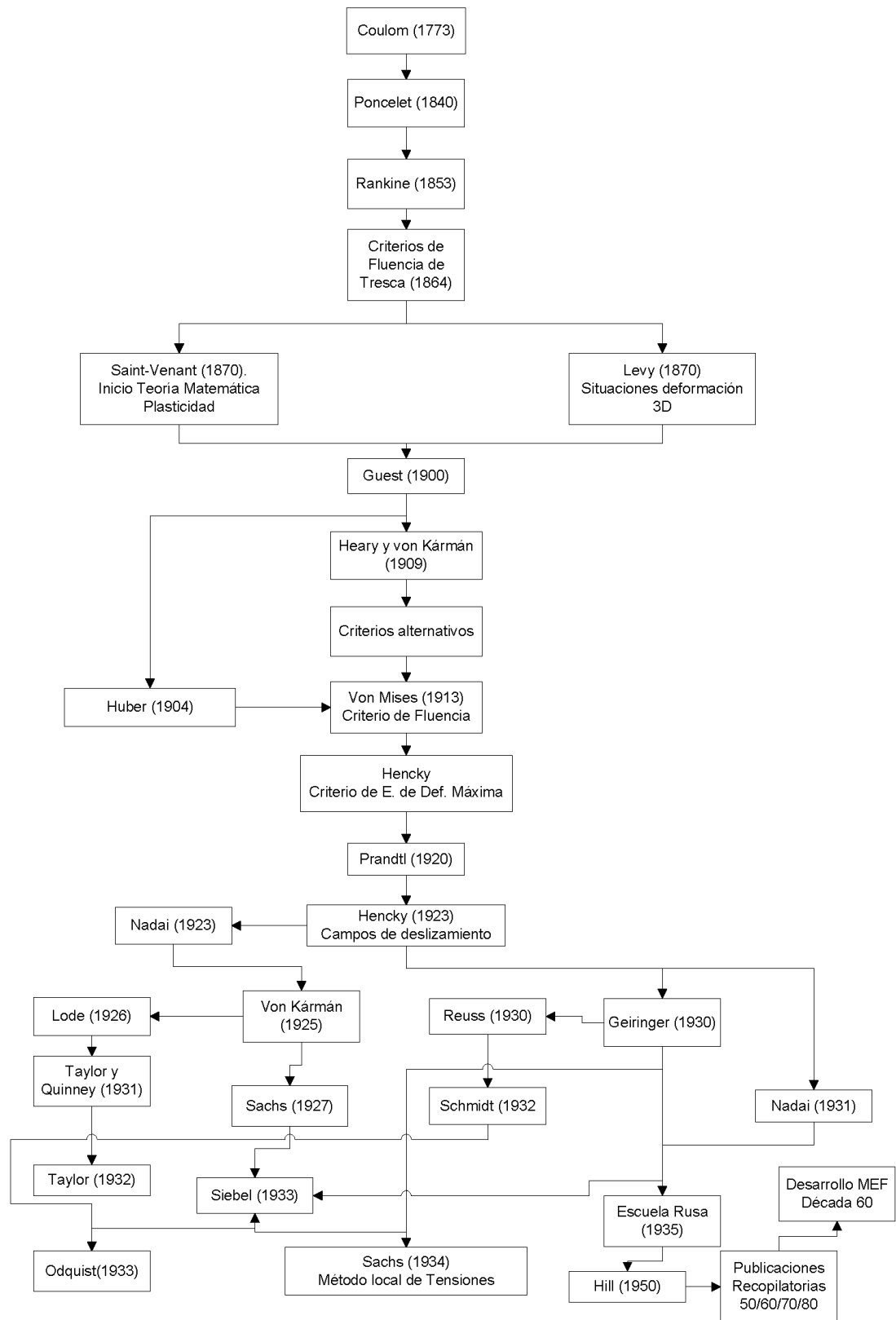
Recientemente, en 2011, Carlier, Conte, Ioneson y Peyré [43], proponen un esquema numérico para aproximar la solución vectorial de los problemas con cargas limitadas. El método hace uso de la proyección de la superficie o campo de deformaciones, bajo condiciones de deformación limitadas e incompresibilidad, computado numéricamente con un gradiente descendiente gradual en la formulación dual del problema.

Desde otra perspectiva, y aplicado al caso que nos ocupa, en trabajos como los ofrecidos por E.M. Rubio et al [44, 45] o F. Martín et al [46, 47] entre otros, se ofrece un nuevo enfoque sobre el TLS, con la variante de los Bloques Rígidos Triangulares, ofreciendo un método para el cálculo de la energía necesaria en la deformación plástica de una pieza en un proceso de forma entre placas planas y paralelas, siguiendo la hipótesis de deformación plana, pudiendo ser este procedimiento una alternativa a los ya existentes y presentando las siguientes ventajas:

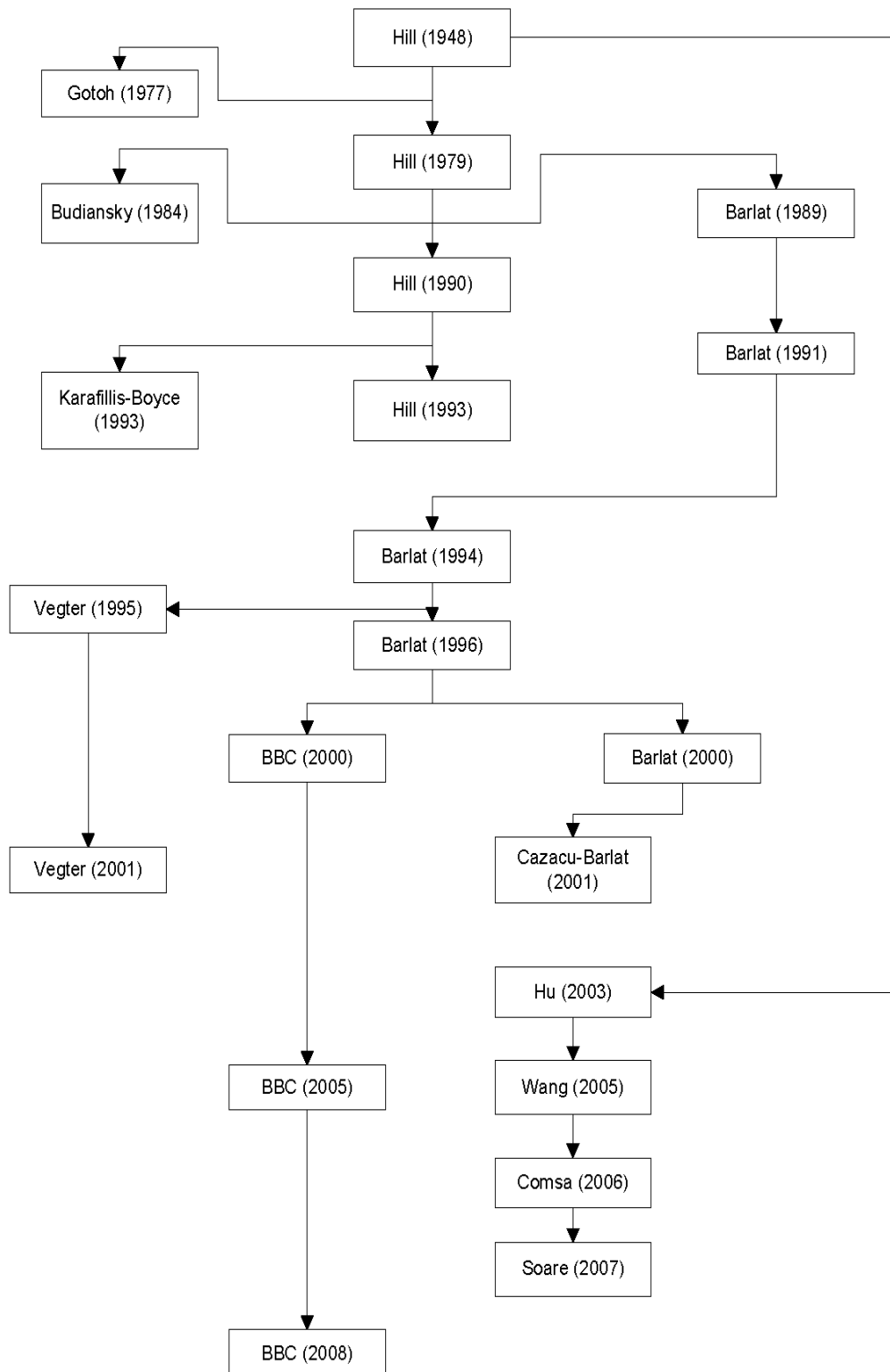
- Permite incorporar el efecto de rozamiento tanto de adherencia como el de deslizamiento o Coulomb.
- Posibilita establecer rangos de aplicación óptima del método, donde se ajusta de forma precisa el valor del límite establecido.
- El cálculo se realiza con un coste computacional sensiblemente inferior al de procedimientos numéricos como el de los elementos finitos.

Es entonces cuando se abre una nueva línea de desarrollo sobre esta temática, enfrentando la problemática mediante configuraciones modulares que simplifican sensiblemente el planteamiento global.

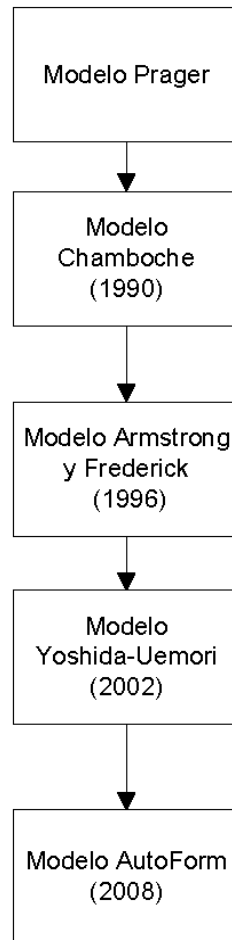
#### A.1.4. Esquema Evolutivo hasta 1980



### A.1.5. Esquema Evolución Criterios de Fluencia



#### A.1.6. Evolución Modelos de Esfuerzos



## Referencias

- [1] W. F. Chen, *Limit Analysis and Soil Plasticity*: J. Ross Pub., 2007.
- [2] J. J. O'Connor and E. F. Robertson. (2000). *Charles Augustin de Coulomb*. Available: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Coulomb.html>
- [3] *Charles-Augustin de Coulomb*. (2013). Available: <http://www.britannica.com/EBchecked/topic/140071/Charles-Augustin-de-Coulomb>
- [4] "Obituary. Henri Tresca, 1814-1885," *Minutes of the Proceedings*, vol. 83, pp. 425-430, 1886.
- [5] J. J. Guest, "On the strength of ductile materials under combined stress," *Philosophical Magazine Series 5*, vol. 50, pp. 69-132, 1900/07/01 1900.
- [6] A. Nadai, "Plastic Behavior of Metals in the Strain-Hardening Range. Part I," *Journal of Applied Physics*, vol. 8, pp. 205-213, 1937.
- [7] A. Reisman, S. Heights, and OH, "Hilda Geiringer: A pioneer of applied mathematics and a woman ahead of her time was saved from fascism by turkey," *Women in Judaism: A Multidisciplinary Journal*, vol. 4, 2007.
- [8] R. Hill, *The Mathematical Theory of Plasticity*. U.K.: Oxford Classic Texts in the Physical Sciences, 1998.
- [9] A. Nádaí and A. M. Wahl, *Plasticity: a mechanics of the plastic state of matter*. New York (USA): McGraw-Hill Book Company, inc., 1931.
- [10] A. P. Green, "XCII. A theoretical investigation of the compression of a ductile material between smooth flat dies," *Philosophical Magazine Series 7*, vol. 42, pp. 900-918, 1951/08/01 1951.
- [11] W. Johnson, R. Sowerby, and J. B. Haddow, *Plane-strain slip-line fields: theory and bibliography*: Edward Arnold, 1970.
- [12] E. Oñate, "Modelado numérico de procesos de conformado de metales usando la formulación del flujo viscoplastico y el método de los elementos finitos," in *I Simposium Nacional sobre Modelado y Simulación en Industria y Servicios Públicos*, Sevilla, 1980, pp. 167-173.
- [13] J. Lian, D. Zhou, and B. Baudelet, "Application of Hill's new yield theory to sheet metal forming-Part I. Hill's 1979 criterion and its application to predicting sheet forming limit," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 31, pp. 237-247, 1989.
- [14] A. G. Leacock, "A mathematical description of orthotropy in sheet metals," *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 54, pp. 425-444, 2006.
- [15] R. Hill, "A user-friendly theory of orthotropic plasticity in sheet metals," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 35, pp. 19-25, 1993.
- [16] H. AV., "The plasticity of an isotropic aggregate of anisotropic face centered cubic crystals," *Journal of Applied Mechanics*, vol. 21, pp. 241-249, 1954.
- [17] F. Barlat and O. Richmond, "Prediction of tricomponent plane stress yield surfaces and associated flow and failure behavior of strongly textured f.c.c. polycrystalline sheets," *Materials Science and Engineering*, vol. 95, pp. 15-29, 1987.

- [18] F. Barlat and K. Lian, "Plastic behavior and stretchability of sheet metals. Part I: A yield function for orthotropic sheets under plane stress conditions," *International Journal of Plasticity*, vol. 5, pp. 51-66, 1989.
- [19] F. Barlat, D. J. Lege, and J. C. Brem, "A six-component yield function for anisotropic materials," *International Journal of Plasticity*, vol. 7, pp. 693-712, 1991.
- [20] A. P. Karafillis and M. C. Boyce, "A general anisotropic yield criterion using bounds and a transformation weighting tensor," *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 41, pp. 1859-1886, 1993.
- [21] F. Barlat, R. C. Becker, Y. Hayashida, Y. Maeda, M. Yanagawa, K. Chung, J. C. Brem, D. J. Lege, K. Matsui, S. J. Murtha, and S. Hattori, "Yielding description for solution strengthened aluminum alloys," *International Journal of Plasticity*, vol. 13, pp. 385-401, 1997.
- [22] J.-W. Yoon, F. Barlat, R. E. Dick, K. Chung, and T. J. Kang, "Plane stress yield function for aluminum alloy sheets—part II: FE formulation and its implementation," *International Journal of Plasticity*, vol. 20, pp. 495-522, 2004.
- [23] D. Banabic, T. Kuwabara, T. Balan, D. S. Comsa, and D. Julean, "Non-quadratic yield criterion for orthotropic sheet metals under plane-stress conditions," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 45, pp. 797-811, 2003.
- [24] O. Cazacu and F. Barlat, "Generalization of Drucker's yield criterion to orthotropy," *Mathematics and Mechanics of Solids*, vol. 6, pp. 613-630, 2001.
- [25] H. Vegter and A. H. van den Boogaard, "A plane stress yield function for anisotropic sheet material by interpolation of biaxial stress states," *International Journal of Plasticity*, vol. 22, pp. 557-580, 2006.
- [26] W. Hu, "Characterized behaviors and corresponding yield criterion of anisotropic sheet metals," *Materials Science and Engineering: A*, vol. 345, pp. 139-144, 2003.
- [27] D. S. Comsa and D. Banabic, "Numerical Simulation of Sheet Metal Forming Processes Using a New Yield Criterion," *Key Engineering Materials* vol. 344, pp. 833-840, 2007.
- [28] S. Soare, J. W. Yoon, and O. Cazacu, "On the use of homogeneous polynomials to develop anisotropic yield functions with applications to sheet forming," *International Journal of Plasticity*, vol. 24, pp. 915-944, 2008.
- [29] J. Lemaitre and J. L. Chaboche, *Mechanics of Solid Materials*: Cambridge University Press, 1994.
- [30] C. O. Frederick and P. J. Armstrong, "A mathematical representation of the multiaxial Bauschinger effect," *Materials at High Temperatures*, vol. 24, pp. 1-26, 2007.
- [31] F. Yoshida, T. Uemori, and K. Fujiwara, "Elastic–plastic behavior of steel sheets under in-plane cyclic tension–compression at large strain," *International Journal of Plasticity*, vol. 18, pp. 633-659, 2002.
- [32] W. Kubli, A. Krasovskyy, and M. Sester, "Modeling of reverse loading effects including workhardening stagnation and early re-plastification," *International Journal of Material Forming*, vol. 1, pp. 145-148, 2008.
- [33] Q. Xue, I. J. Beyerlein, D. J. Alexander, and G. T. Gray Iii, "Mechanisms for initial grain refinement in OFHC copper during equal channel angular pressing," *Acta Materialia*, vol. 55, pp. 655-668, 2007.

- [34] T. C. Lowe and R. Z. Valiev, *Investigations and Applications of Severe Plastic Deformation: Proceedings of the NATO Advanced Research Workshop, Moscow, Russia, 2-7 August, 1999*: Kluwer Acad., 2000.
- [35] M. H. Yu, "Advances in strength theories for materials under complex stress state in the 20th century," *Applied Mechanics Reviews*, vol. 55, pp. 169-218, 2002.
- [36] M. Yu, *Unified Strength Theory and Its Applications*: Springer-Verlag, 2004.
- [37] C. S. Desai, "Letter to editor single surface yield and potential function plasticity models: A review," *Computers and Geotechnics*, vol. 7, pp. 319-333, 1989.
- [38] H. Jahed, S. B. Lambert, and R. N. Dubey, "Total deformation theory for non-proportional loading," *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, vol. 75, pp. 633-642, 1998.
- [39] S. Krenk, "Family of invariant stress surfaces," *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 122, pp. 201-208, 1996.
- [40] S. Nemat-Nasser, A. Maximenko, and E. Olevsky, "Modeling the plastic response of thin metal membranes," *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 54, pp. 2474-2494, 2006.
- [41] S. Nemat-Nasser, "Experimentally- and dislocation-based multi-scale modeling of metal plasticity including temperature and rate effects," 2005, pp. 12-19.
- [42] N. A. Fleck and J. W. Hutchinson, "A reformulation of strain gradient plasticity," *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 49, pp. 2245-2271, 2001.
- [43] G. Carlier, M. Comte, I. Ionescu, and G. Peyre, "A projection approach to the numerical analysis of limit load problems," *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, vol. 21, pp. 1291-1316, 2011.
- [44] E. M. Rubio, M. A. Sebastián, and A. Sanz, "Mechanical solutions for drawing processes under plane strain conditions by the upper bound method," *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 143-144, pp. 539-545, 2003.
- [45] E. M. Rubio, R. Domingo, C. González, and A. Sanz, "Análisis comparativo de modelos de bloques rígidos triangulares en el estudio mecánico de procesos de estirado superior," *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 115-116, p. 6, 2004.
- [46] F. Martín, "Desarrollo, integración y optimización en el estudio del proceso de forja mediante el teorema del límite superior a través del modelo de bloques rígidos triangulares," Ingeniería de Fabricación, Universidad de Málaga, Málaga, 2009.
- [47] F. Martín, C. Bermudo, and L. Sevilla, "Analytical approach to the indentation process. Application of the Upper Bound Element Technique," *Materials Science Forum*, vol. 713, pp. 13-18, 2011.





# ANEXO II

---

## RESULTADOS DE ENDURECIMIENTO POR DEFORMACIÓN

*Análisis, Desarrollo y Validación del Método del Límite Superior en Procesos de Conformado por Indentación*

---



## Índice Anexo II

A.2.1	Introducción .....	A.2.1
A.2.2	Modelo 1 .....	A.2.2
A.2.3	Modelo 2 .....	A.2.3
A.2.4	Modelo 3 .....	A.2.7



## A.2. RESULTADOS DE ENDURECIMIENTO POR DEFORMACIÓN

### A.2.1 Introducción

Tal y como se mencionó en varios apartados del Capítulo 5, a continuación se presentan los resultados obtenidos de las distintas simulaciones realizadas con el programa de análisis numérico que aplica el Método de Elementos Finitos, DEFORM 2D, al extenso grupo de metales y aleaciones trabajados mediante el proceso de indentación simulado.

Se ha dividido según el modelo aplicado al material. La elección de un modelo u otro depende del valor que toma  $n$ , el cual varía según el material conformado (Tabla A.2.1).

Tabla A.2.1: Aplicación del modelo de endurecimiento según  $n$

Material	$n$	Modelo Endurecimiento
Aluminio, Acero, Titanio y aleaciones	$0 \leq n \leq 10$	Modelo 3
	$n > 10$	Modelo 2
Superalaciones	$0 \leq n \leq 12$	Modelo 3
	$n > 12$	Modelo 1

Por consiguiente, en los siguientes apartados se muestran los resultados de acuerdo a la clasificación de la Tabla A.2.1.

Se aprecia que los Modelos 2 y 3 se adaptan mejor al comportamiento del material que el Modelo 1. Esto se debe a que el Modelo 1 únicamente se aplica para las Superalaciones, cuando éstas presentan un exponente de endurecimiento mayor a 12. Las Superalaciones son materiales con características especiales, que suelen presentar un comportamiento diferenciado de la mayoría de los materiales metálicos utilizados en la industria. Por tanto, la evolución del endurecimiento también es distinta, siendo lo que genera esa pequeña disparidad entre los resultados del modelo analítico y el de elementos finitos.

## A.2.2 Modelo 1

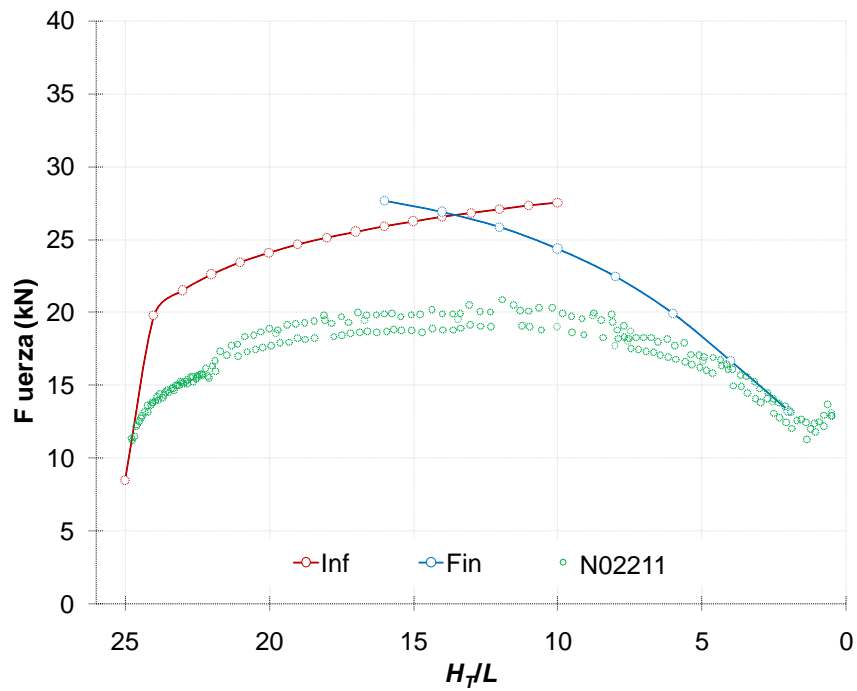


Figura A.2.1: Resultados para N02211,  $n=0.21$

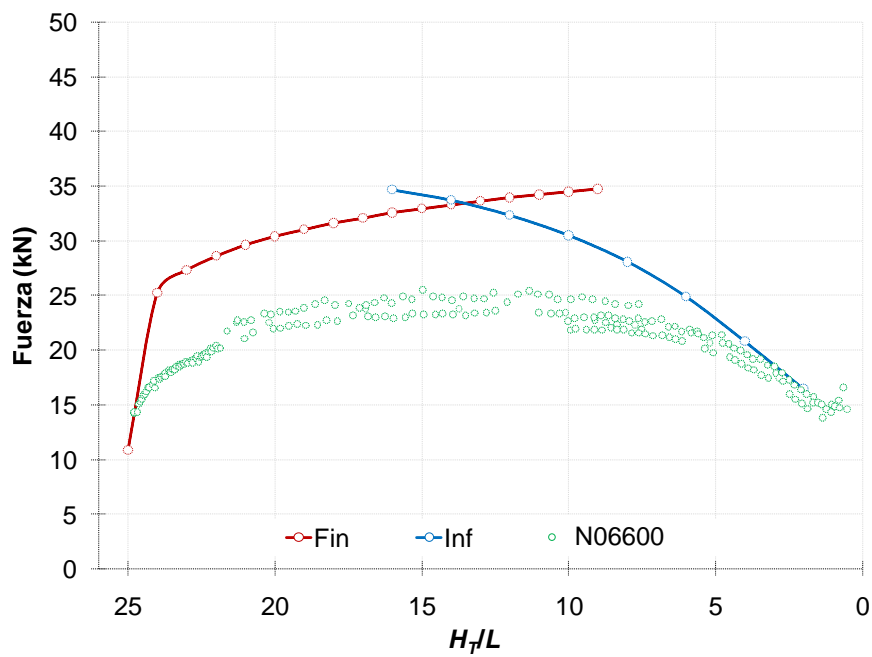
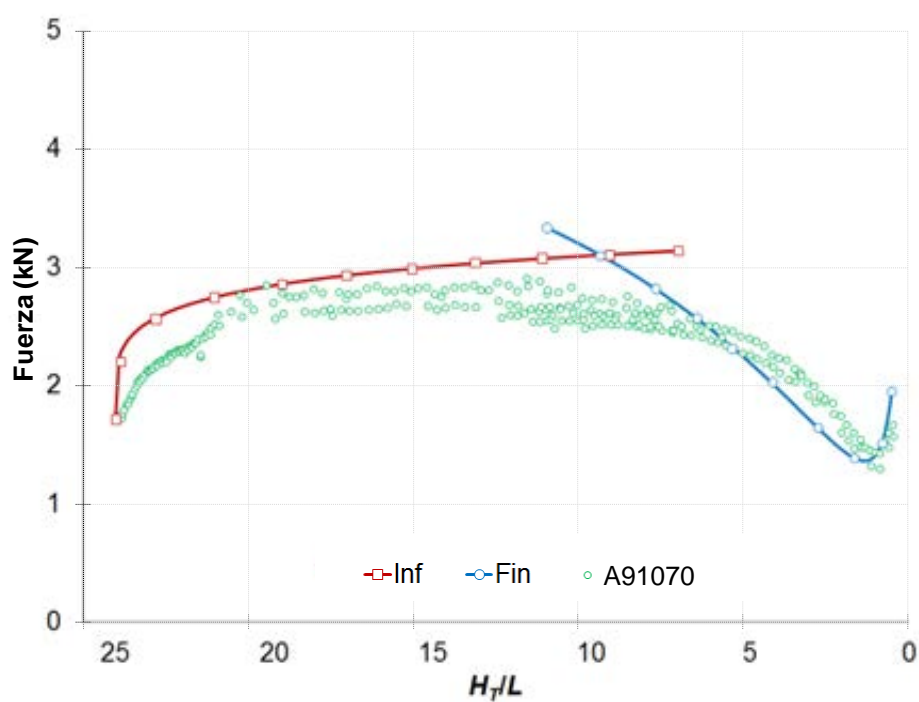
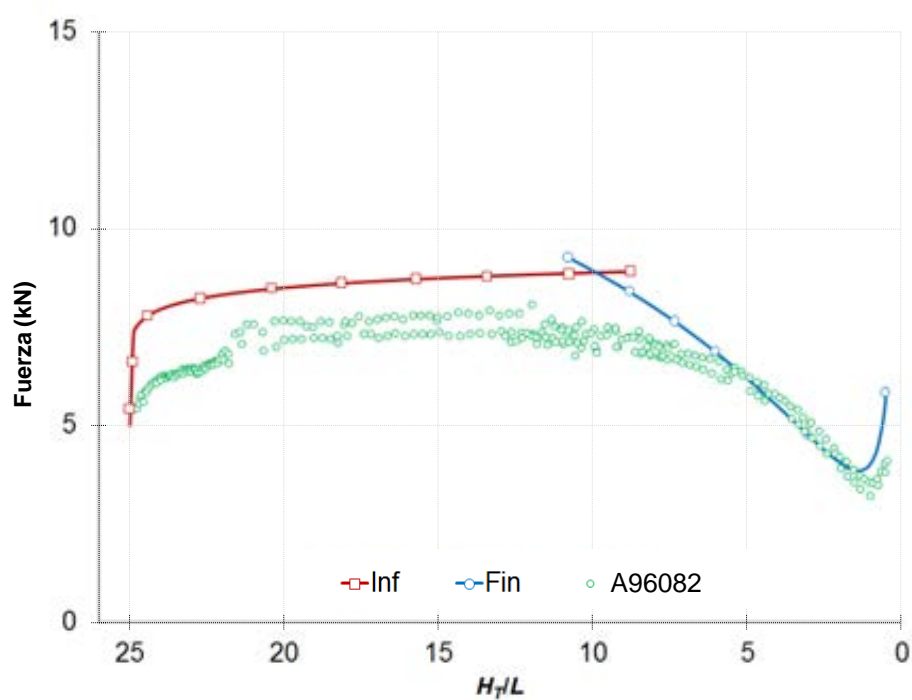


Figura A.2.2: Resultados para N06600,  $n=0.20$

## A.2.3 Modelo 2

Figura A.2.3: Resultados para Aluminio A91070,  $n=0.21$ Figura A.2.4: Resultados para A96082,  $n=0.11$

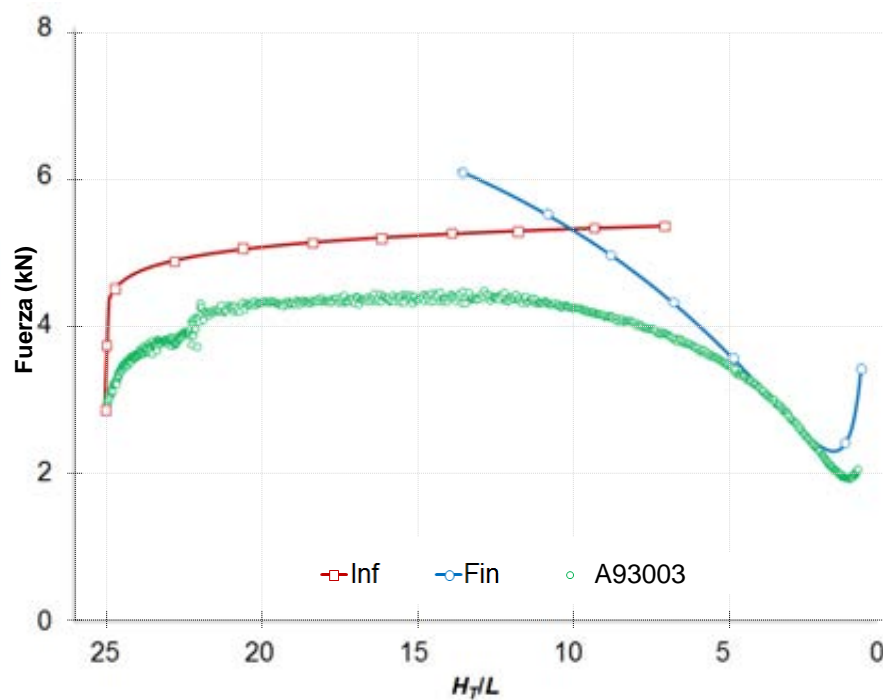


Figura A.2.5: Resultados para A93003,  $n=0.12$

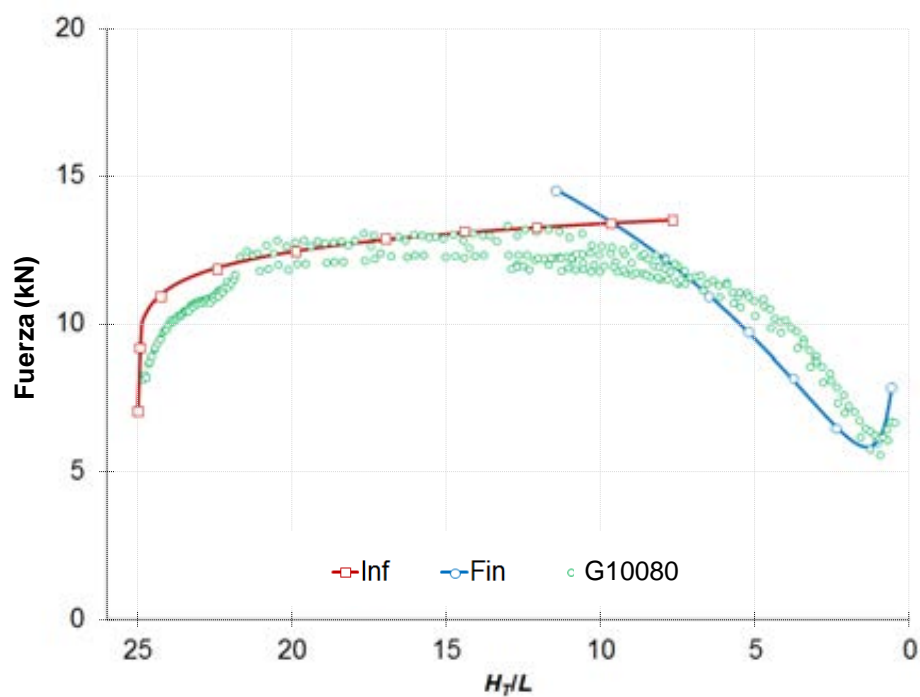
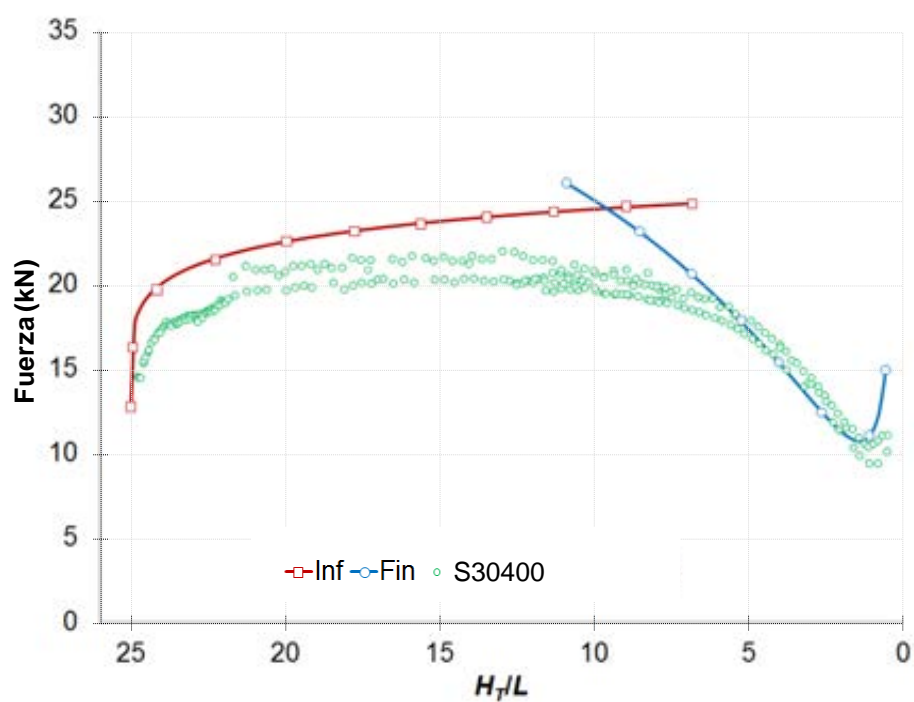
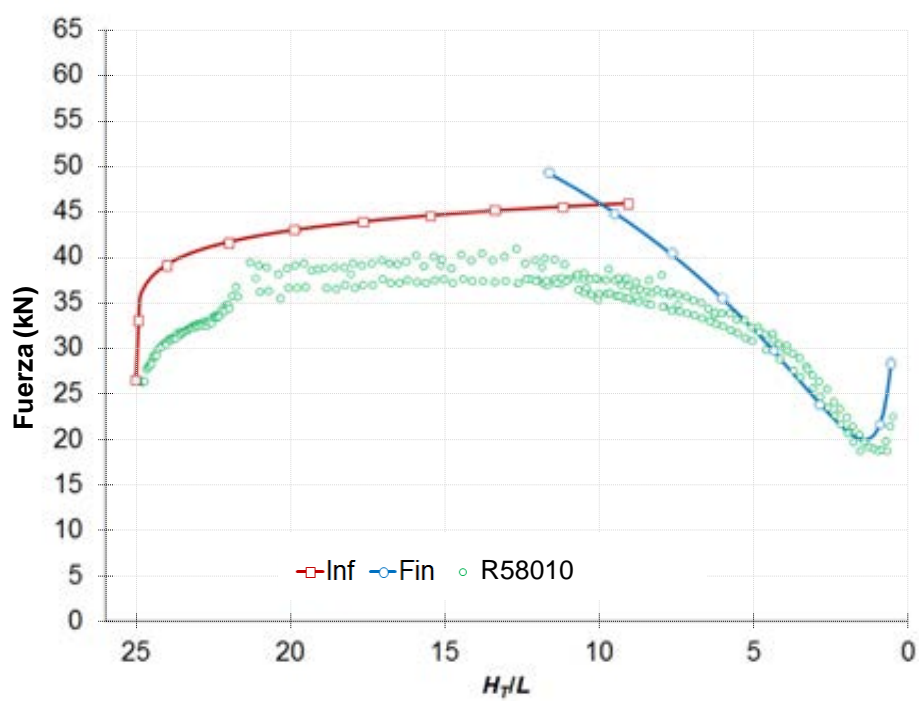


Figura A.2.6: Resultados para Acero G10080,  $n=0.17$



Figura A.2.7: Resultados para S30400,  $n=0.19$ Figura A.2.8: Resultados para R58010,  $n=0.17$

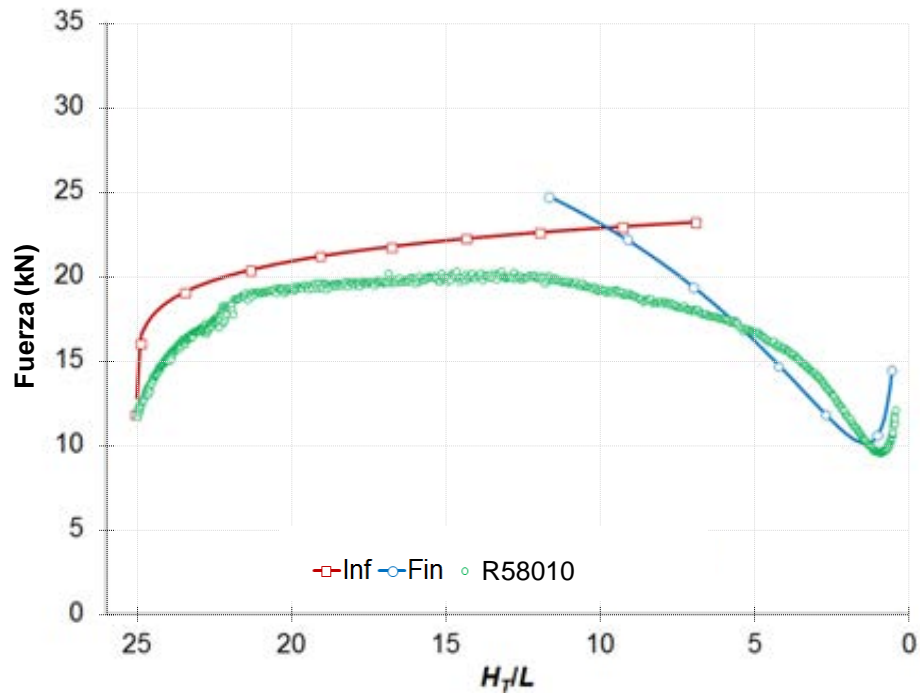


Figura A.2.9: Resultados para R50250,  $n=0.23$

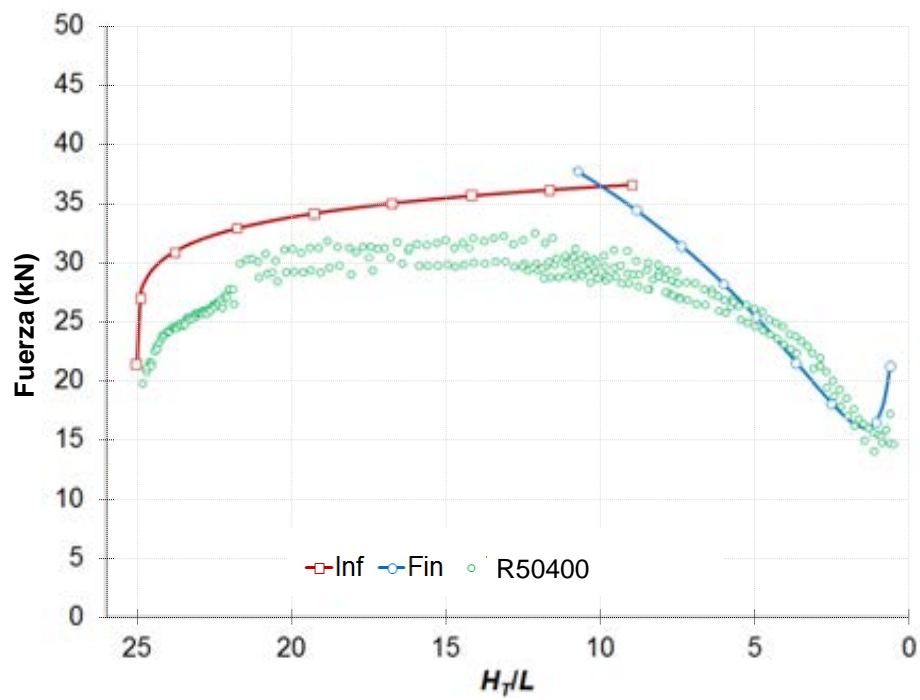
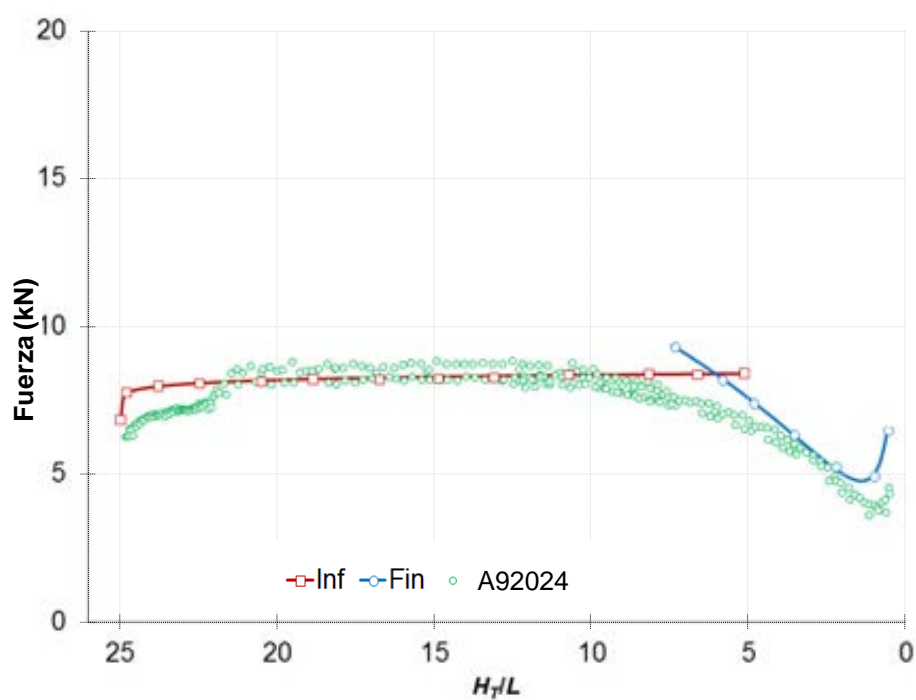
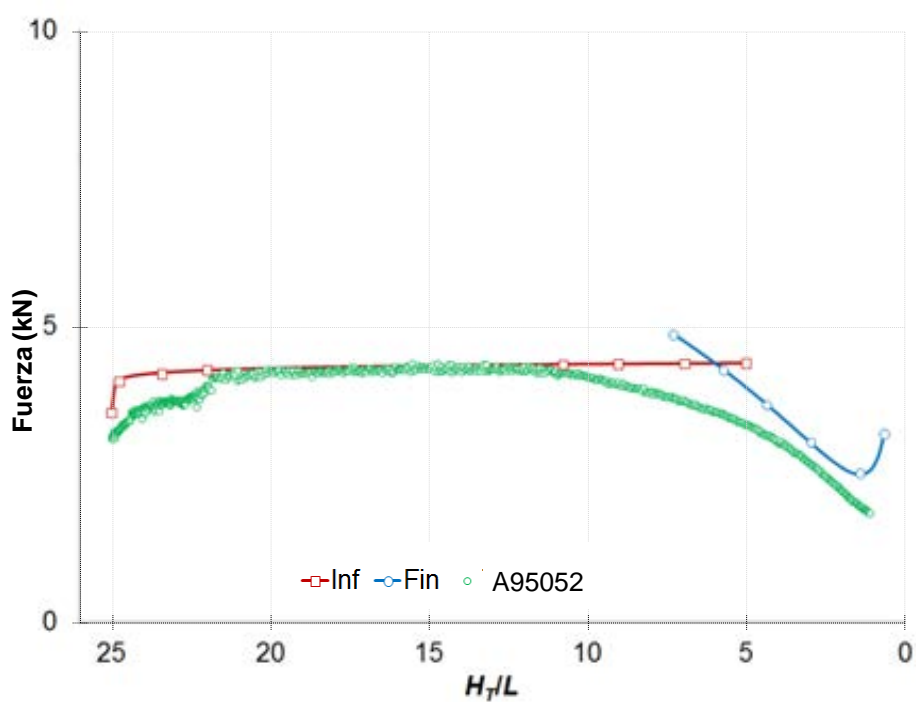


Figura A.2.10: Resultados para R50400,  $n=0.20$

## A.2.4 Modelo 3

Figura A.2.11: Resultados para A92024,  $n=0.10$ Figura A.2.12: Resultados para A95052,  $n=0.09$

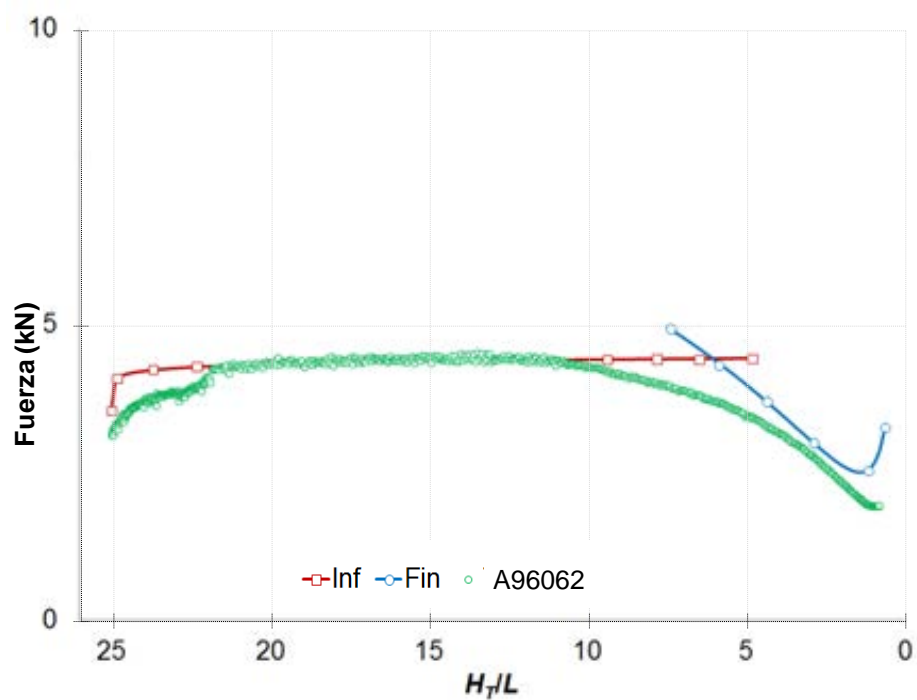


Figura A.2.13: Resultados para A96062,  $n=0.10$

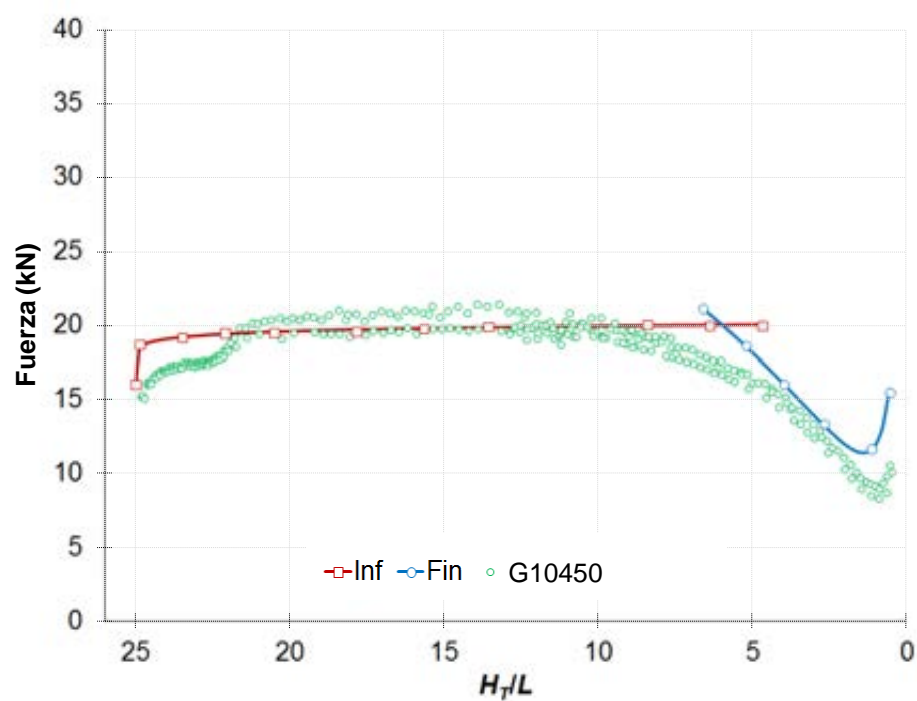
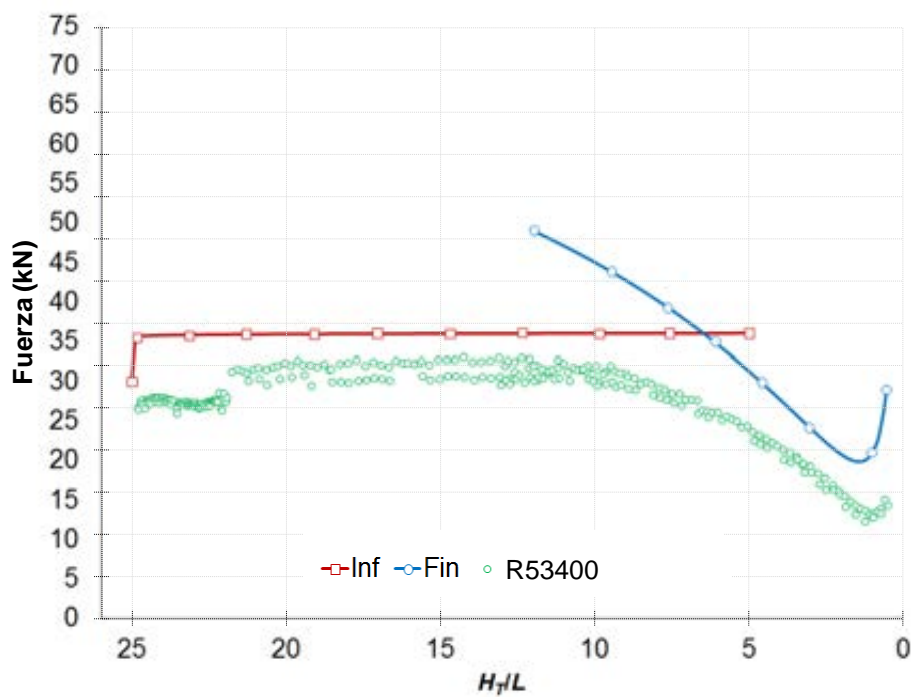
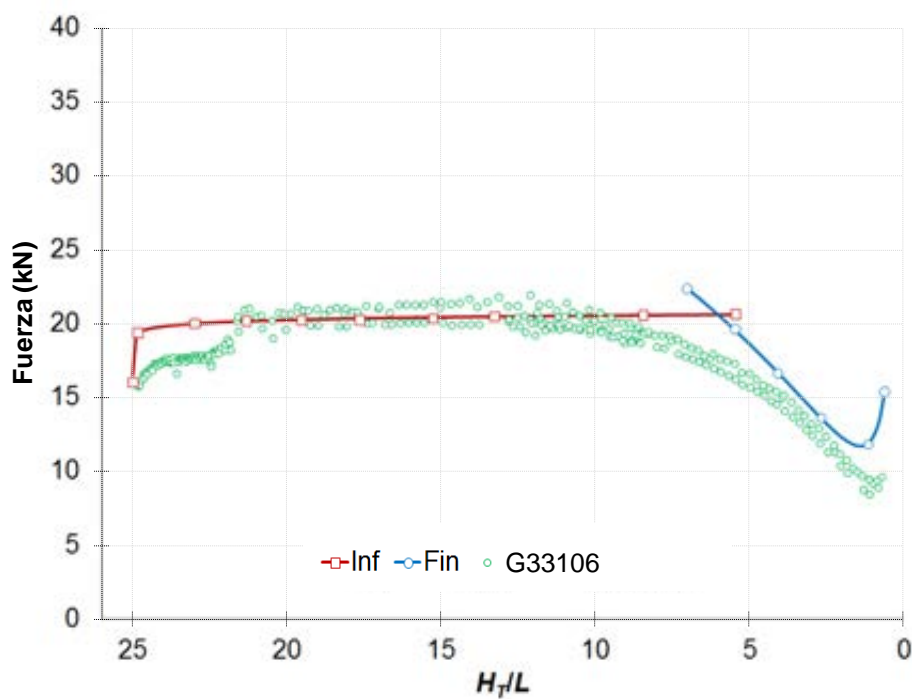


Figura A.2.14: Resultados para Acero G10450,  $n=0.10$

Figura A.2.15: Resultados para R53400,  $n=0.02$ Figura A.2.16: Resultados para G33106,  $n=0.08$

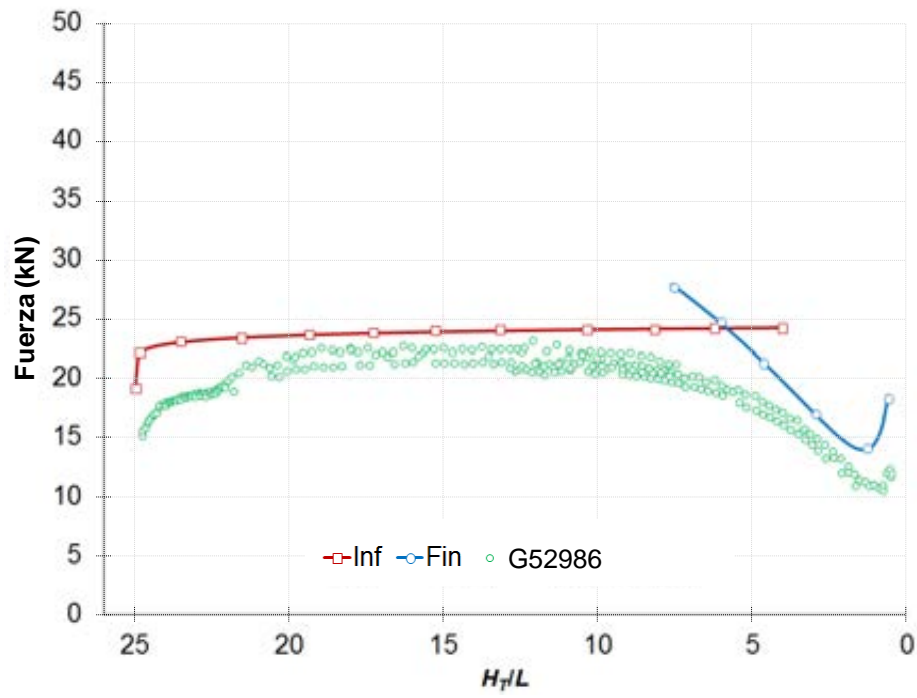


Figura A.2.17: Resultados para G52986,  $n=0.12$